

Die akustische Wellengleichung in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten

Franz Zotter

5. Dezember 2019

Wellengleichung: Die lineare verlustlose Wellengleichung der Akustik,

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0, \quad (1)$$

setzt die örtliche Krümmung $\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ des Schalldrucks p in Summe über alle 3 kartesische Koordinaten (zusammengefasst wird dieser örtliche Krümmungsoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace-Operator genannt) gleich mit der zeitlichen Krümmung des Schalldrucks $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$; mit der Schallgeschwindigkeit $c = 343 \text{ ms}^{-1}$. Die Wellengleichung ist das grundlegende Modell, das wir für die lineare, verlustlose Schallausbreitung im Raum nutzen.

Diese Wellengleichung beruht auf dem Druck, der zur Verformung eines Luftvolumens aufgebracht werden muss, sowie auf der Druckdifferenz, die als Beschleunigungskraft zur Bewegung kleiner Luftvolumenpakete aufgebracht werden muss.

Ebene Welle: Gelöst wird die Gleichung durch die ebene Welle, zumeist im Frequenzbereich ausgeschrieben als

$$p = e^{i\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2)$$

Darin ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz, $\boldsymbol{\theta}^T = [\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta]$ die Herkunftsrichtung der ebenen Welle vom Azimutwinkel φ und Zenitwinkel ϑ , und $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ der Ortsvektor am Betrachtungspunkt. Die ebene Welle hat überall den Betrag 1, nur die Phase hängt von der Projektion des Ortsvektors \mathbf{r} auf die Herkunftsrichtung $\boldsymbol{\theta}$ ab, und sie verläuft auf Normalebenen zu $\boldsymbol{\theta}$ jeweils konstant.

Green'sche Funktion: Wird eine punktförmige Anregung am Zeitpunkt 0 am Koordinatenursprung herangezogen, ergibt die Green'sche Funktion die Lösung im Frequenzbereich

$$G = \frac{e^{-i\frac{\omega}{c} r}}{4\pi r}. \quad (3)$$

Diese Lösung ist lediglich vom Abstand r zwischen Quelle und Beobachtungspunkt abhängig.

Wellengleichung in Kugelkoordinaten: Die Wellengleichung sieht ein wenig anders aus, wenn sie in den Kugelkoordinaten formuliert wird, die den Radius (Abstand vom Ursprung) r , den Azimutwinkel φ (zur xz -Ebene eingeschlossener Winkel), und den Zenitwinkel (zur z -Achse eingeschlossener Winkel) verwenden. Durch die bereits von sich aus krummlinige Abbildung kleiner Koordinatenänderungen in φ, ϑ in die bisher angenommenen kartesischen Koordinaten, muss der Laplace-Operator zur Bestimmung der örtliche Krümmung eine etwas kompliziertere Form annehmen

$$\underbrace{\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]}_{\Delta} p = 0. \quad (4)$$

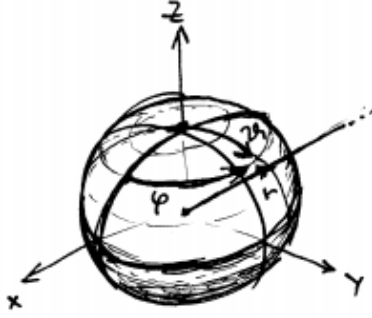


Abbildung 1: Kugelkoordinaten: Radius r zum Ursprung, Azimutwinkel φ zur xz -Ebene, Zenitwinkel ϑ zur z -Achse.

Sphärische Basislösungen: Die homogenen Lösungen im Kugelkoordinatensystem (im Frequenzbereich) setzen sich aus den sphärischen Bessel- und Hankelfunktionen (2. Art) im Radius mal Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$ zusammen, $j_n(kr)$, $h_n^{(2)}(kr)$, den Kugelflächenfunktionen $Y_n^m(\varphi, \vartheta) = Y_n^m(\boldsymbol{\theta})$, die entweder in Abhängigkeit zu φ, ϑ oder zum Richtungsvektor $\boldsymbol{\theta}$ formuliert werden, und den Wellenspektren b_{nm} und c_{nm} für durchlaufende/stehende bzw. radial ausstrahlende Wellenfelder

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} (b_{nm} j_n(kr) + c_{nm} h_n^{(2)}(kr)) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}). \quad (5)$$

Die enthaltenen ganzzahligen Indizes n, m werden häufig als Ordnung und Grad bezeichnet, und sie bewegen sich in den Grenzen $0 \leq n$ und $-n \leq m \leq n$.

Green'sche Funktion in Kugelkoordinaten: In sphärischen Basislösungen wird die Green'sche Funktion am Radius r_s und in der Richtung $\boldsymbol{\theta}_s$, geschrieben als

$$G = -ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\boldsymbol{\theta}_s) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) \begin{cases} h_n^{(2)}(kr) j_n(kr_s) & \text{for } r \geq r_s, \\ j_n(kr) h_n^{(2)}(kr_s) & \text{for } r \leq r_s. \end{cases} \quad (6)$$

Die benötigten Funktionen sind weiter unten gegeben, oder können entsprechenden Software-Bibliotheken entnommen werden.

Ebene Welle in Kugelkoordinaten: Die ebene Welle in sphärischen Basislösungen durch die asymptotische Approximation von $h_n^{(2)}(kr)$ für große Radien aus der Green'schen Funktion mal dem Faktor $\frac{4\pi r_s}{e^{i\frac{\omega}{c} r_s}}$ gewonnen, und sie besteht nur mehr aus durch den Ursprung durchlaufenden Wellen

$$p = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n j_n(kr) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}_s). \quad (7)$$

Die Unterlagen zeigen die detaillierten mathematisch-physikalischen Herleitungen und sind untergliedert in:

1. Herleitung einer Wellengleichung auf Basis federnd verketteter Massen
2. Herleitung der Kompressionsgleichung infinitesimaler Luftvolumenpakete
3. Herleitung der Bewegungsgleichung infinitesimaler Luftvolumenpakete
4. Wellengleichung in kartesischen Koordinaten
5. Ebene Wellen als homogene Lösungen
6. Green'sche Funktion als inhomogene Lösung (Punktquelle)
7. Green'sche Funktion im schallharten Quader
8. Herleitung der Wellengleichung in sphärischen Koordinaten
9. Green'sche Funktion und ebene Welle in sphärischen Basislösungen

Ein Blick in die folgenden Bücher zum Thema wird wärmstens empfohlen:

Fourier Acoustics, Earl G. Williams

Technische Akustik, Michael Möser

Einführung in die Akustik, Heinrich Kuttruff

Raumakustik/Room Acoustics, Heinrich Kuttruff

Fundamentals of General Linear Acoustics, Finn Jacobsen, Peter Møller-Juhl

Die Animationen auf den Webseiten sind betrachtenswert

Ebene Wellen:

<https://blog.soton.ac.uk/soundwaves/wave-basics/the-nature-of-waves/>

<https://blog.soton.ac.uk/soundwaves/wave-basics/wavelength-frequency-relation/>

Green'sche Funktion:

<https://blog.soton.ac.uk/soundwaves/wave-basics/point-sources-inverse-square-law/>

Sphärische Basislösungen:

https://iaem.at/Members/zotter/spherical_soundfield/sound-fields-in-terms-of-spherical-basis-solutions/interior-and-exterior-spherical-basis-solutions

Kugelflächenfunktionen:

https://iaem.at/Members/zotter/spherical_soundfield/sound-fields-in-terms-of-spherical-basis-solutions/spherical-harmonics

https://en.wikipedia.org/wiki/Ambisonics#/media/File:Spherical_Harmonics_deg3.png

https://iaem.at/kurse/pool/grundlagen-der-immersiven-3d-audiotechnik/zu-4-mathematische-herleitungsvideos/sh_composer.zip

Sphärische Besselfunktionen:

https://iaem.at/Members/zotter/spherical_soundfield/sound-fields-in-terms-of-spherical-basis-solutions/spherical-bessel-and-hankel-functions

Zerlegung einer Green'schen Funktion und ebener Wellen in sphärische Basislösungen:

https://iaem.at/Members/zotter/spherical_soundfield/sound-fields-in-terms-of-spherical-basis-solutions/fields-with-limited-order

Die händische Umrechnung des Laplace-Operators vom kartesischen auf das sphärische Koordinatensystem kann hier in Form eines Videos mitgelesen werden

<https://iaem.at/kurse/pool/grundlagen-der-immersiven-3d-audiotechnik/zu-4-mathematische-herleitungsvideos/anim9.mp4/view>

1 Die Wellengleichung federnd aneinandergeschalteter Massen

Die Wellengleichung wird vorerst auf Basis bekannter, Newton'scher Bewegungsgleichungen (Masse $F = m\ddot{\xi}$, Federung $F = s\xi$) hergeleitet. Diese Herleitung beginnt wie in Möser's Buch mit einem differentiellen mechanischen Segment, das in Verkettung ein wellenausbreitungsfähiges System ergibt.

1.1 Differentielles Masse-Feder-Segment.

Die kompakteste Herleitung der Wellengleichung lässt sich auf ein differentiell schmales Masse-Feder-Segment aufbauen. In Abb. 2 beschreibt die Dimension x eine Position auf der Feder, z.B. die dritte Windung. Die Koordinate

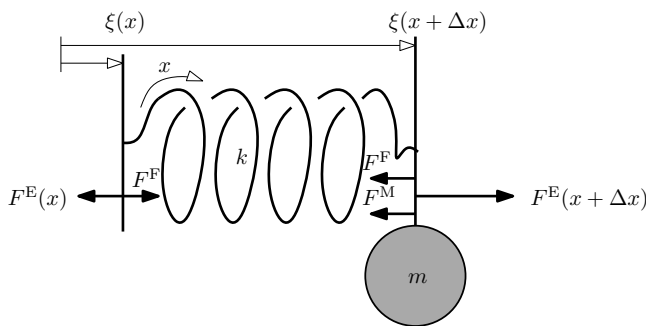


Abbildung 2: Differentielles Masse-Feder-Segment.

$\xi(x)$ hingegen beschreibt die Lage des zugehörigen Punktes im Raum, vgl. Möser.

Federwirkung, Masse. Eine Feder reagiert mit einer Kraft, wenn sie aus dem entspannten Zustand $\xi_{\text{entsp}}(x) = x$ heraus verformt wird. Die Wegdifferenz $\xi(x + \Delta x) - \xi(x)$ wäre entspannt Δx . Bei Verformung ergibt sich eine Federkraft proportional zur Längendifferenz $\xi(x + \Delta x) - \xi(x) - \Delta x$ und Steifigkeit s . Ein Massenelement an der Stelle $\xi(x + \Delta x)$ reagiert mit einer Kraft proportional zur Masse m und Beschleunigung $\ddot{\xi}(x + \Delta x)$ ihrer Position. Die Gleichungen für die Einzelkräfte sind

$$F^F = k_F [\xi(x + \Delta x) - \xi(x) - \Delta x] \quad \frac{\partial}{\partial t} \dot{F}^F = k_F [v(x + \Delta x) - v(x)],$$

$$F^M = m \ddot{\xi}(x + \Delta x) \quad \frac{\partial}{\partial t} \dot{F}^M = m \ddot{v}(x + \Delta x).$$

Die Gelegenheit bot sich, alle zwei Gleichungen zeitlich abzuleiten, womit wir in der ersten Gleichung Δx loswerden. Danach taucht die Auslenkung ξ in den Gleichungen mindestens einmal abgeleitet auf, wodurch wir die Formelbuchstaben $\dot{\xi} = v$, $\ddot{\xi} = \dot{v}$, $\ddot{\xi} = \ddot{v}$ durch die Schnelle und ihre Ableitungen ersetzen konnten. Am linken und rechten Ende des Segments folgen aufgrund der rechtsseitigen Masse unterschiedliche Kräftegleichgewichte zwischen äußeren Kräften $F^E(x)$ und $F^E(x + \Delta x)$ und den drei inneren Einzelkräften:

$$\text{linkes Ende:} \quad F^E(x) = F^F$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{F}^E(x) = k_F [v(x + \Delta x) - v(x)], \quad (8)$$

$$\text{rechtes Ende:} \quad F^E(x + \Delta x) = F^F + F^M$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{F}^E(x + \Delta x) = k_F [v(x + \Delta x) - v(x)] + m \ddot{v}(x + \Delta x). \quad (9)$$

1.2 1D Wellengleichung

Ein eindimensionales Medium wird durch eine Kette infinitesimal schmaler Masse-Feder-Segmente aus Abb. 2 beschrieben, Abb. 3. Dabei gelten spezifische, längenbezogene Werte für das Material: Massebelag ρ , Steifigkeitsbelag σ . Dabei steigt die Masse mit zunehmender Materiallänge $m = \rho \Delta x$, während Steifigkeit damit abnimmt: $k_F = \sigma / \Delta x$.

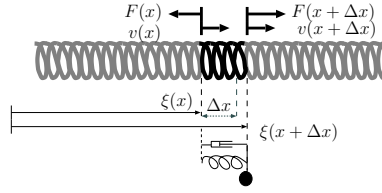


Abbildung 3: Kontinuierliche Feder mit Feder- und Massenbelag.

Subtrahieren wir die Gln. (9)(8) und bilden den Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$, erhalten wir einen Differentialquotienten, also eine partielle örtliche Ableitung:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \rho \Delta x \dot{v}(x + \Delta x), \quad \left| \text{mit } \frac{1}{\Delta x} \text{ und } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \rho \dot{v}. \quad (10)$$

Das selbe gilt für Gl. (9) zeitlich abgeleitet

$$\dot{F}(x) = \sigma \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}, \quad \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \right.$$

$$\dot{F}(x) = \sigma \frac{\partial}{\partial x} v. \quad (11)$$

Die örtlich abgeleitete Gl. (11) ergibt mit der zeitlich abgeleiteten Gl. (10) $\sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} v = \rho \ddot{v}$. Nach Division durch σ und Ersetzung $c^2 = \frac{\rho}{\sigma}$ ist folgende Kompaktschreibweise üblich

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v = 0. \quad (12)$$

Diese Gleichung wird *Wellengleichung* genannt.

Sie besteht offenbar aus einer Schwingungsgleichung in der Zeit, die über $\frac{1}{c^2}$ mit einer Schwingungsgleichung im Ort verknüpft ist.

Homogene Lösung. Ein Produktansatz aus zwei Exponentialansätzen ist zur Lösung der Differentialgleichungen in mehrerer Variablen geeignet: $e^{i\omega t}$, e^{ikx} . Die Ansätze werden mit einem *Produktansatz* verknüpft und ergeben einen so genannten Separationsansatz $v_h = e^{i\omega t} e^{ikx}$. Gl. (12) liefert uns nach Einsetzen der Ableitungen die *charakteristische Gleichung*:

$$(ik)^2 v_h - \frac{(i\omega)^2}{c^2} v_h = 0 \quad \left| \frac{1}{v_h} \right.$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (13)$$

Somit muss $k = \pm\omega$ sein und die homogene Lösung ist bei frei wählbarer Frequenz ω :

$$v_h = a e^{i\omega t + ikx} + b e^{i\omega t - ikx}. \quad (14)$$

Nachdem negative Phase einer Verzögerung entspricht, kann nun abgelesen werden, dass die Lösung $e^{i\omega t + ikx}$ bei negativen x später ankommt, also eine *rücklaufende* Welle ist. Die andere Welle $e^{i\omega t - ikx}$ kommt bei positiven x später an, ist also eine *hinlaufende* Welle.

2 Herleitung Kompressionsgleichung eines kleinen Luftpakets

Luft verhält sich ähnlich. Es fehlt allerdings eine Erklärung, wie die sich dynamische Steifigkeit der Luft physikalisch ergibt, und wie mehrdimensionale Wellenausbreitung formuliert wird.

Ideales Gas Die Kompressionsgleichung der Luft beruht auf der Gleichung für das ideale Gas

$$pV = nRT, \tag{15}$$

die für die Stoffmenge n (in mol, für Luft 29.9 g mol^{-1}) über die Gaskonstante $R = 8.314$ einen Zusammenhang zwischen Druck p in Pa und dem Volumen V (in m^3) ergibt, der aber noch von der Temperatur T (in K) abhängt.

Adiabatische Wärmeenergien Zur Bestimmung der von Volumenänderungen abhängigen Temperatur wird erste Hauptsatz der Thermodynamik hinzugezogen. Für ein System ohne Massenveränderung (=konstanter Stoffmenge) stellt er zwischen zugeführter Wärmeenergie dQ , aufgenommener innerer Energie dU , und der vom System geleisteten Ausdehnungsarbeit $p dV$ im Volumen, den Zusammenhang her, siehe Abb. 4

$$dQ = dU + p dV. \tag{16}$$

Der Zuwachs an innerer Energie bezeichnet die zur Erwärmung um die Temperaturdifferenz dT benötigte Energie

$$dU = n c_V dT. \tag{17}$$

In unserem Fall ist die spezifische innere Wärmemenge c_V (für konstant gehaltenes Volumen) eine Materialkonstante für Luft; bezogen auf 1kg anstatt der molaren Masse ist sie $c_{V,\text{kg}} = 0.718 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. In der linearen, verlustlosen Wellengleichung des Luftschalls vollziehen sich Volumsänderung durch Schallausbreitung dermaßen schnell, dass dabei keine Wärme zwischen benachbarten Luftpaketen ausgetauscht wird: $dQ = 0$. Was bleibt ist ein reversibler Energieaustausch zwischen innerer Energie und Volumsarbeit:

$$n c_V dT + p dV = 0, \tag{18}$$

aus dem wir durch Einsetzen der Gleichung des idealen Gases $p = \frac{nRT}{V}$ zuerst $n c_V dT = -\frac{nRT}{V} dV$ erhalten, und nach der Division durch $n c_V T$ die Gleichung

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V}. \tag{19}$$

Wir integrieren sie und erhalten $\ln T = -\frac{R}{c_V} \ln V = \ln V^{-\frac{R}{c_V}}$, bzw. die gesuchte Volumstemperatur

$$T = V^{-\frac{R}{c_V}}. \tag{20}$$

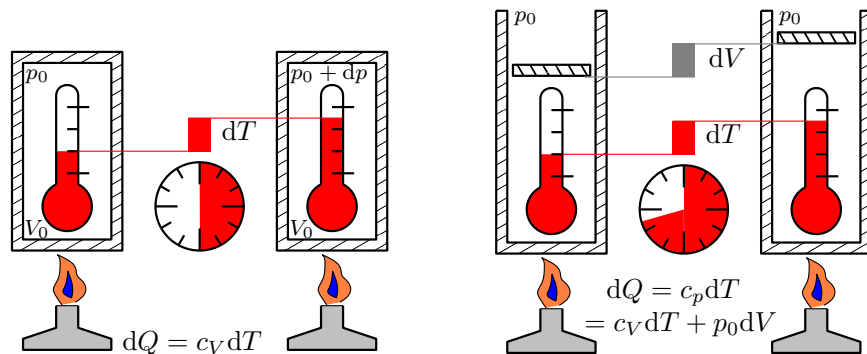


Abbildung 4: Energiezufuhr zur Temperaturerhöhung bei konstantem Volumen oder konstantem Druck

Adiabatische Zustandsgleichung Eingesetzt in die Gleichung des idealen Gas $\frac{pV}{T} = nR = \text{const}$ erhalten wir

$$pV^{1+\frac{R}{c_V}} = pV^\gamma = \text{const}. \tag{21}$$

wobei $\gamma = 1.4$ zusammengefasst als Adiabatenexponent der Luft bezeichnet wird. Wir können Zustandsübergänge nun durch die Forderung $\frac{p_1 V_1^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = 1$ beschreiben. Wir nehmen an $p_1 = p_0 + p$, $V_1 = V_0 + \Delta V$,

$$\left(1 + \frac{p}{p_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\gamma = 1, \quad \Rightarrow 1 + \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\gamma} \quad (22)$$

und finden durch Linearisierung von $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ bei kleinen Argumenten, $1 + p/p_0 = 1 - \gamma \Delta V/V_0$, somit

$$p = - \underbrace{\gamma p_0}_{\rho c^2} \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (23)$$

wobei $\rho_0 c^2$ geläufigere Konstanten sind.

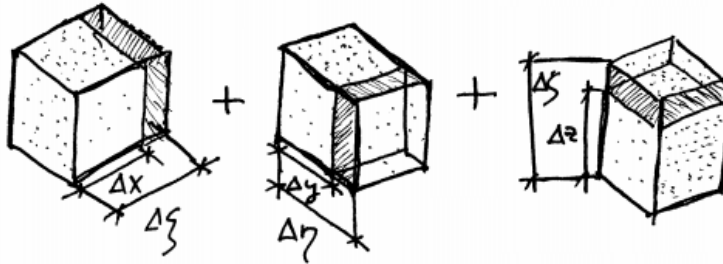


Abbildung 5: Differenzielle Volumsänderungen in alle 3 Richtungen.

Um einen Zusammenhang mit der Volumsverformung ΔV mit kartesischen Koordinaten herzustellen, gehen wir vom ruhenden Luftpaket $V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$ der kartesischen Abmessungen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ aus. Kleine Volumsänderungen setzen sich linear zusammen aus den Abmessungen $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$ des verformten Luftpaketes:

$$\Delta V = (\Delta \xi - \Delta x) \Delta y \Delta z + \Delta x (\Delta \eta - \Delta y) \Delta z + \Delta x \Delta y (\Delta \zeta - \Delta z) \quad (24)$$

(leistenförmigen Auslassungen, die bei gleichzeitiger Volumsänderung in 3 Dimensionen fehlen würden sind bei kleinen Volumsänderungen vernachlässigbare Terme der Kleinheit 2. Ordnung, z.B. $(\Delta \xi - \Delta x)(\Delta \eta - \Delta y)\Delta z$) Eingesetzt erhalten wir $p = -\rho_0 c^2 \frac{\Delta V}{V_0} = -\rho_0 c^2 \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta x} + \frac{\Delta \eta}{\Delta y} + \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} - 3\right)$. Zeitliche Ableitung nützt hier, um die Konstante -3 loszuwerden. Die kartesischen Komponenten der Auslenkung werden dabei zu Komponenten der Schallschnelle $\frac{\partial \Delta \xi}{\partial t} = \Delta v_x$, $\frac{\partial \Delta \eta}{\partial t} = \Delta v_y$, $\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial t} = \Delta v_z$. Wir lassen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ gegen 0 streben und erhalten örtliche Differentialquotienten

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho_0 c^2 \nabla^T \mathbf{v}. \quad (25)$$

Der Vektor-Operator mit den Ableitungen $\nabla^T = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$ wird als *Nabla*-Operator (in der Anwendung hier auch als *Divergenz*) bezeichnet, und die Schnellen fassen wir zusammen im Schnellevektor $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$; wir können die Summe der komponentenweisen Ableitung dann als Inprodukt $\nabla^T \mathbf{v}$ notieren.

Merksatz Kompressionsgleichung: (die zeitliche Ableitung des Drucks ist hier als Punkt notiert)

$$\dot{p} = -\rho_0 c^2 \nabla^T \mathbf{v} \quad (26)$$

Unabhängig von der Bewegung des Schwerpunkts eines Luftpaketes: Steigt die Schnelle \mathbf{v} vom einen zum anderen Ende des Luftpaketes, so vergrößert sich das Volumen Luftpaketes über die Zeit stetig, und damit sinkt der innere Schalldruck zeitlich.

3 Herleitung der Bewegungsgleichung eines infinitesimalen Luftpaketes

Die Masse des kleinen Luftpaketes im ruhenden Medium sei beschrieben durch seine Abmessungen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, und die Dichte $\rho_0 = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ der Luft im Ruhezustand. Das Luftpaket des Volumens $V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$ hat die

Masse $m = \rho_0 V_0$. Wirkt an einem Ende des Luftpakets der Druck $p(x)$ und am anderen $p(x + \Delta x)$, so ergibt sich in x -Richtung insgesamt die Kraft $F_x(x) = [p(x) - p(x + \Delta x)] \Delta y \Delta z$ auf das Luftpaket. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Luftpakets als mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}_x(x) = \frac{v_x(x) + v_x(x + \Delta x)}{2}$ in x -Richtung wird durch diese Kraft gemäß $F_x = m \frac{\partial v_x}{\partial t}$ beschleunigt zu $[p(x + \Delta x) - p(x)] \Delta y \Delta z = -\rho_0 V_0 \frac{\partial \bar{v}_x(x)}{\partial t}$. Wir dividieren durch $V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$ und lassen Δx gegen 0 streben

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad (27)$$

und wegen der Stetigkeit von v_x vereinfacht sich die mittlere Geschwindigkeit zu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_x(x) + v_x(x + \Delta x)}{2} = v_x(x)$.

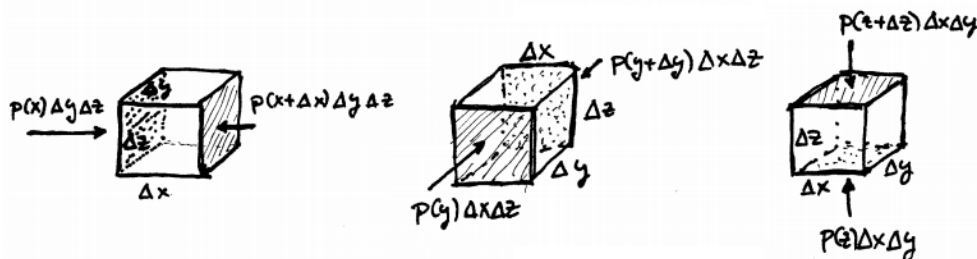


Abbildung 6: Örtliche Druckdifferenzen erzeugen resultierende Kräfte, die ein Luftpaket beschleunigen

Die selben Betrachtungen gelten auch für die Bewegung in die y und z -Richtung. Für alle 3 Komponenten in vektorieller Form können wir für die örtliche Ableitung den Nabla-Operator $\nabla = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}]^T$ als Gradienten des Schalldrucks einsetzen.

Merksatz Bewegungsgleichung: (die zeitliche Ableitung des Schnellektors ist hier als Punkt notiert)

$$\nabla p = -\rho_0 \dot{\mathbf{v}}. \quad (28)$$

Unabhängig von der Ausdehnung eines Luftpakets: Lastet ein ansteigender Druck p an zwei Ende des Luftpakets, so wird sein Schwerpunkt entgegen des Anstiegs in die Richtung des geringeren Drucks beschleunigt.

4 Lineare, verlustlose Wellengleichung in kartesischen Koordinaten

Die Wellengleichung setzt sich zusammen aus der zeitlich abgeleiteten Kompressionsgleichung $c^{-2} \ddot{p} = -\rho_0 \nabla^T \dot{\mathbf{v}}$ und der örtlich abgeleiteten Bewegungsgleichung des Schalldrucks (Divergenz) $\nabla^T \nabla p = \Delta p = -\rho_0 \nabla^T \dot{\mathbf{v}}$, was offensichtlich die örtliche Krümmung in Proportion zur zeitlichen Krümmung setzt $\Delta p = c^{-2} \ddot{p}$, häufig kompakt notiert als

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0. \quad (29)$$

Hierbei ist das Symbol $\Delta = \nabla^T \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator (manchmal auch als $\text{div}(\text{grad}(\cdot))$ notiert).

5 Ebene Welle: homogene Lösung durch Produkt aus Fourier-Ansätzen

Zumeist werden sowohl für die zeitliche Abhängigkeit $e^{i\omega t}$, als auch für die örtlichen Abhängigkeiten $e^{ik_x x}$, $e^{ik_y y}$ in $e^{ik_z z}$ Fourier-Ansätze verwendet. Werden die Ansätze als Produkt miteinander kombiniert

$$p_h = e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{i\omega t}. \quad (30)$$

Dabei ist jede einzelne zweite Ableitung sehr leicht zu bestimmen aus z.B. für x : $\frac{\partial p_h}{\partial x} = (ik_x) p_h$ und $\frac{\partial^2 p_h}{\partial x^2} = (ik_x)^2 p_h$, womit Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$\left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) p_h = 0. \quad (31)$$

Der Ausdruck in Klammern wird häufig *charakteristische Funktion* genannt, jedenfalls muss er null werden, damit die Bedingung eingehalten wird. Es ist an dieser Stelle praktisch, die Komponenten k_x, k_y, k_z im sog. *Wellenzahlvektor* $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$ zusammenzufassen, womit die charakteristische Gleichung kompakt geschrieben werden kann als

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \mathbf{k}^T \mathbf{k}, \quad (32)$$

und der ortsabhängige Teil der Lösung kann durch die Eigenschaft der Exponentialfunktion $e^a e^b = e^{a+b}$ geschrieben werden als $e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}$, wenn $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ als Ortsvektor beschrieben wird

$$p_h = e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t}. \quad (33)$$

Dieser Ausdruck beschreibt ebene Wellen. Wir können sie besser verstehen, wenn wir den *Wellenzahlvektor* zusammensetzen aus einem Einheitsvektor $\boldsymbol{\theta}$, der in eine Richtung zeigt, und den wir mit der geforderten Vektorlänge $\|\mathbf{k}\| = \frac{\omega}{c}$ skalieren

$$p_h = e^{i\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t} = e^{i\omega(t + \frac{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}}{c})}. \quad (34)$$

Damit ist klar: der Betrag der ebenen Welle ist überall im Raum konstant $|p_h| = 1$ und eine örtliche Phasenfortschreitung ergibt sich aus der Projektion des Ortsvektors \mathbf{r} auf die Herkunftsrichtung $\boldsymbol{\theta}$ der ebenen Welle.

Ebene Welle in x -Richtung: Der Vereinfachung wegen, können wir vorerst eine ebene Welle aus der negativen x -Richtung betrachten durch $\boldsymbol{\theta}^T = [-1, 0, 0]$ und damit

$$p_h = e^{-i\frac{\omega}{c} x} e^{i\omega t}. \quad (35)$$

Im Frequenzbereich beschreibt $e^{-i\omega\tau}$ eine Verzögerung um τ . Wir erkennen für den Fourier-Ausdruck $e^{i\omega t}$ die Phase $e^{-i\omega\frac{x}{c}}$, also eine ortsabhängige Verzögerung der entlang x laufenden Welle um $\tau = \frac{x}{c}$. Die Schallgeschwindigkeit erhalten wir aus Umformung nach $x = c\tau$, und $\frac{\partial}{\partial\tau} x = c$, und sie beträgt ca. $c = 343 \text{ m s}^{-1}$.

Ebene Welle in beliebiger Richtung: Für alle Frequenzen durch das Fourier-Integral $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t} d\omega$ zusammengesetzt, erhalten wir die Impulsantwort der ebenen Welle bei beliebiger Richtung $\boldsymbol{\theta}$

$$p = \delta(t + \frac{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}}{c}), \quad (36)$$

und sehen, dass die allgemein ausgerichtete ebene Welle einer richtungsabhängigen Verzögerung bzw. Vorwegnahme entspricht: Wenn \mathbf{r} in Richtung der Herkunftsrichtung der ebenen Welle zeigt, erhalten wir eine Vorwegnahme, in die entgegengesetzte Richtung eine Verzögerung. Auf allen Ebenen, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\boldsymbol{\theta}$ verlaufen, ist die Zeitverzögerung jeweils konstant.

Schallfeldsynthese aus ebenen Wellen: Mit einer Linearkombination ebener Wellen aller Richtungen durch einen Koeffizienten $\psi(\boldsymbol{\theta}, \omega)$ lassen sich Schallfelder zusammensetzen, die keine Hindernisse oder Materialübergänge beinhalten (im Frequenzbereich)

$$p(\omega) = \int_{\mathbb{S}^2} \psi(\boldsymbol{\theta}, \omega) e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} d\boldsymbol{\theta}, \quad (37)$$

worin das Symbol \mathbb{S}^2 die Einheitskugel bezeichnet, auf der alle Richtungsvektoren $\boldsymbol{\theta}$ liegen müssen.

6 Die Green'sche Funktion als inhomogene Lösung (Punktquelle)

Die Green'sche Funktion ist eine prototypische Elementarlösung für eine punktförmige Anregung am Koordinatenursprung. Sie ist definiert als

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G = -\delta(t)\delta(\mathbf{r}),$$

und wird aus den Fourier-Ansätzen für die kartesischen Lösungen und die Zeit angesetzt:

$$e^{i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z} = e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t}, \quad (38)$$

Wir setzen das Schallfeldsynthese-Integral an mit dem unbekanntem Gewicht ψ :

$$G = \iint \psi e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t} d\omega d\mathbf{k}. \quad (39)$$

Mit den Ableitungen $\Delta e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} = (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} = -k^2 e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}$ und $\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$, eingesetzt in die inhomogene Gleichung erhalten wir

$$- \iint \psi \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t} d\omega d\mathbf{k} = -\delta(t) \delta(\mathbf{r}).$$

Die Transformationen $e^{-i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} e^{-i\omega t} d\mathbf{r} dt \int$ entfernen einige Integrale aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung der Fourier-Ausdrücke

$$- \int \psi \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underbrace{\left[\int e^{i(\mathbf{k}-\hat{\mathbf{k}})^T \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right]}_{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\hat{\mathbf{k}})} \underbrace{\left[\int e^{i(\omega-\hat{\omega})t} dt \right]}_{2\pi \delta(\omega-\hat{\omega})} d\omega d\mathbf{k} = - \underbrace{\int \delta(t) e^{-i\hat{\omega}t} dt}_1 \underbrace{\int \delta(\mathbf{r}) e^{-i\hat{\mathbf{k}}^T \mathbf{r}} d\mathbf{r}}_1,$$

und der Koeffizient bestimmt sich zu $\psi = \frac{1}{(2\pi)^{3+1}} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$. Wird G im Frequenzbereich belassen, entfällt einer der $\frac{1}{2\pi}$ -Ausdrücke in ψ , und das Integral $e^{i\omega t} d\omega \int$ wird weg gelassen. Wir transformieren ψ über die Wellenzahlen \mathbf{k} in den Ortsbereich

$$G = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ikr\zeta}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\mathbf{k}.$$

Nun lässt sich das Inprodukt im Exponenten umschreiben zu $\mathbf{k}^T \mathbf{r} = kr \boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\theta}_r = kr \cos \vartheta = kr\zeta$. *Wir sehen bereits jetzt: die Green'sche Funktion kann nach der Integration nur mehr von der Distanz r zwischen Quelle und Empfänger abhängen $G = G(\omega, r)$.*

Dean Duffy zeigt in seinem Buch (The Green's function and applications, S. 110-112) eine erwähnenswert kompakte Herleitung, die unten wiedergegeben wird.

Rücktransformation aus dem Wellenzahlraum in den Ortsbereich Für 3 Raumdimensionen ist die Rücktransformation besonders einfach zu berechnen. Wir erkennen zuerst, dass die Ersetzung von $\mathbf{k}^T \mathbf{r}$ durch $kr \cos \vartheta$ einen Radius des Wellenzahlvektors $k = \|\mathbf{k}\|$ und den Richtungskosinus zwischen \mathbf{r} und \mathbf{k} beinhaltet. Im Wellenzahlraum lässt sich ein entsprechend orientiertes Koordinatensystem definieren, um das Integral zu vereinfachen $\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} k^2 dk d\varphi d\cos \vartheta = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 k^2 dk d\varphi d\zeta$. Nach Umsortierung der Integrale lösen wir

$$\begin{aligned} G &= \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{\int_{-1}^1 e^{ikr\zeta} d\zeta}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k^2 dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{ikr} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k^2 dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk - \int_0^{-\infty} \frac{e^{-i(-k)r} (-k)}{(-k)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d(-k) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k dk. \end{aligned} \quad (40)$$

Der Nenner beinhaltet Polstellen, die eine Partialbruchzerlegung erfordern $\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{1}{2k} \frac{1}{k - \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{2k} \frac{1}{k + \frac{\omega}{c}}$, somit

$$G = \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{k - \frac{\omega}{c}} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{k + \frac{\omega}{c}} dk \right]. \quad (41)$$

Für eine kausale Lösung muss eine bestimmte, verschwindende Verschiebung der Polstellen angewendet werden, damit sie nicht mehr am Integrationsweg liegen.

Kausale Lösungen allgemein (Integral über ω). Einfache kausale Systeme (z.B. Elektrotechnik/Systemtechnik) gehorchen formal einer Fourier-Rücktransformation

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - a} d\omega, \quad (42)$$

worin wir das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ zu einer geschlossenen Integrationskontur verbinden dürfen, sofern der Ausdruck entlang dieser Kontur verschwindet. Wie sonst auch in der Laplace-Transformation bei der Integration entlang der Imaginärachse üblich, bloß für die Fourier-Transformation entlang der reellen Achse, besagt das Lemma von Jordan, dass wir $\int_{-\infty}^{\infty}$ zum geschlossenen Integrationsweg C_+ über einen unendlich großen Halbkreis mit positiver Orientierung auf der oberen komplexen Zahlenebene schließen $\int_{-\infty}^{\infty} = \oint_{C_+} = \lim_{R \rightarrow \infty} [\int_{-R}^R d\omega + \int_0^\pi R d\varphi]$. Voraussetzung ist, dass auf diesem Halbkreis der Integrand verschwindend klein wird, i.e. $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{i(\cos \varphi - \sin \varphi) R t}}{R e^{i\varphi - a}} = 0$. Für positive Zeiten $t > 0$ und Frequenzen $\omega \geq 0$ ist das der Fall. Bei negativen Zeiten müsste das Integral hierzu auf der unteren komplexen Halbebene geschlossen werden $\int_{-\infty}^{\infty} = \oint_{C_-} = \lim_{R \rightarrow \infty} [\int_{-R}^R d\omega + \int_0^{-\pi} R d\varphi]$, wo der Integrand am halbkreisförmigen Pfad zu negativen Zeiten $t < 0$ verschwindet, siehe Abb. 7. Wir erhalten

$$h(t) = \begin{cases} \oint_{C_+} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - a} d\omega, & \text{if } t > 0, \\ \oint_{C_-} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - a} d\omega, & \text{if } t < 0. \end{cases} \quad (43)$$

Mit der Cauchy'schen Integralformel für reguläre analytische Funktionen $f(z)$ über einfache Pole $\frac{1}{z-a}$ erhalten wir

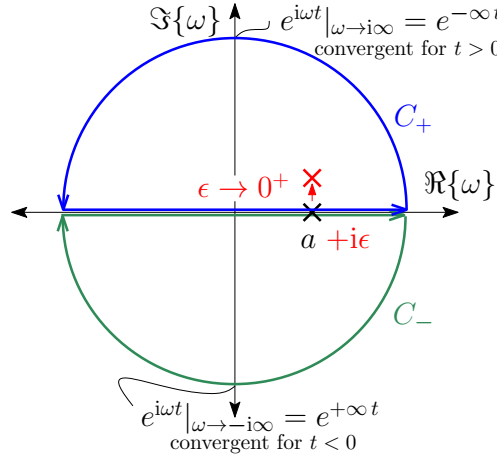


Abbildung 7: Closure of improper integration path using C_+ over the positive imaginary half plane for $t > 0$, and C_- for $t < 0$, and regularization of pole for causal result, i.e. non-zero only for C_+ .

das Resultat

$$\oint_{C_{\pm}} \frac{f(z)}{z - a} dz = \pm 2\pi i \begin{cases} f(a), & \text{wenn der Pfad } C_{\pm} \text{ den Pol } a \text{ umrkeist,} \\ 0, & \text{wenn der Pol } a \text{ außerhalb von } C_{\pm} \text{ liegt.} \end{cases} \quad (44)$$

Wenn wir der Pol also ursprünglich auf der reellen Achse liegt $a \in \mathbb{R}$, so können wir ihn um einen verschwindend kleinen imaginären Betrag verschieben $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{C_{\pm}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\epsilon - a} d\omega$ (regularisieren) sodass er gezielt im kausalen Integrationsweg C_+ landet und nicht in C_- . Das Resultat ist perfekt kausal und verschwindet bei negativer Zeit: $h(t) = 2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{ia t - \epsilon t} u(t)$, with the unit step function $u(t) = 1$ for $t \geq 0$ and 0 for $t < 0$, see Fig. 7.

Rückintegration der Green'schen Funktion in den Ortsbereich. Kausalität erfordert also eine gezielte Regularisierung reeller Polstellen bezüglich der Frequenz: Polstellen kausaler Systeme im Fourierbereich müssen stets oberhalb der reellen Achse liegen (nicht wie in der Laplace-Transformation: dort sind sie links der imaginären Achse). Wir ersetzen ω also durch $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \omega - i\epsilon$ was uns in der Rücktransformation der Partialbruchzerlegung Eq. (41) Kausalität garantiert. Für positive Radien $r \geq 0$ erfordert das Lemma von Jordan den Schluss des uneigentlichen Integrals über k mit den Pfad C_+ auf der oberen Halbebene, siehe. Abb. 8,

$$G = \frac{1}{2(2\pi)^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{ir} \left[\int_{C_+} \frac{e^{ikr}}{k - \frac{\omega}{c} + i\epsilon} dk + \int_{C_+} \frac{e^{ikr}}{k + \frac{\omega}{c} - i\epsilon} dk \right] = \frac{2\pi i e^{-i\frac{\omega}{c} r}}{2(2\pi) i r} = \frac{e^{-i\frac{\omega}{c} r}}{4\pi r}. \quad (45)$$

Offensichtlich besteht die Green'sche Funktion aus einer reinen Verzögerung $e^{-i\frac{\omega}{c}r}$ um die Zeit $\tau = \frac{r}{c}$ vom Beobachtungsort zur Quelle, und dem ebenfalls abstandsabhängigen Gewicht $\frac{1}{4\pi r}$.

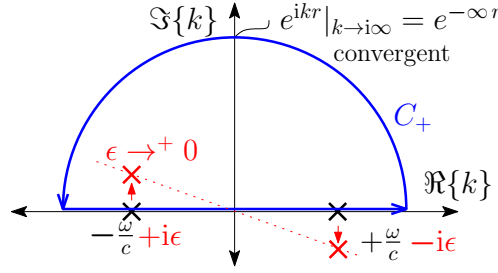


Abbildung 8: Causality-enforcing regularization $\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \omega - i\epsilon$ of the poles in Green's function wrt. wave number k . For a positive radius $r \geq 0$, closure of the improper integration path requires C_+ with semicircle on the positive imaginary half plane (or C_- for $r \leq 0$).

Ebene Wellen als Grenzfall Die Radiuskoordinate der Green'schen function ist die Distanz zwischen den kartesischen Ortsvektoren \mathbf{r}_s und \mathbf{r} , an denen Quelle und Empfänger sitzen. Wenn wir die Quelledistanz sehr groß machen, am besten durch Ausdrücke, die sich aus Radius des Ortsvektors und seiner Richtungs zusammensetzen $\mathbf{r}_s = r_s \boldsymbol{\theta}_s$, können wir ebene Wellen als Fernfeldnäherung von Punktquellen beschreiben

$$r_s = \|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}\| = \sqrt{(r_s \boldsymbol{\theta}_s - \mathbf{r})^T (r_s \boldsymbol{\theta}_s - \mathbf{r})} = \sqrt{r_s^2 - 2r_s \boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{r} + r^2} \quad (46)$$

$$\lim_{r_s \rightarrow \infty} r_s = \lim_{r_s \rightarrow \infty} r_s \sqrt{1 - 2\frac{\boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{r}}{r_s} + \frac{r^2}{r_s^2}} = r_s - \boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{r}. \quad (\text{with } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - 2x} = 1 - x).$$

Die *Phasenapproximation*, ist dabei erster Ordnung, da für eine Wellenlänge $\frac{c}{f}$ von 30 cm, bereits eine kleine Distanzänderung um z.B. 15 cm die Phase umkehrt, obwohl die Quelle möglicherweise 15 m entfernt liegt. Daher muss zumindest die Näherung erster Ordnung $r_s - \boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{r}$ verwendet werden. Im Gegensatz dazu wäre die Mühe völlig irrelevant für die *Amplitudenapproximation*: Der Unterschied, ob wir $\frac{1}{15 \text{ m}}$ oder $\frac{1}{15 \text{ m} + 15 \text{ cm}}$ verwenden ist vernachlässigbar.

Bei großen Distanzen r_s wird die Green'sche Funktion proportional zur ebenen Welle, über einen konstanten Vorfaktor, wenn r_s konstant ist:

$$\lim_{r_s \rightarrow \infty} G = \frac{e^{-ik r_s}}{4\pi r_s} e^{ik \boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{r}}. \quad (47)$$

7 Schallhart begrenzter Quaderraum

Homogene Lösung für homogene Randbedingungen 1D. Wählen wir für die 1D Wellengleichung $(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2})p = 0$ zwei schallharte Abschlüsse $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ als Randbedingungen für die Stellen $x = \{0, L\}$, so muss für $x = 0$ gelten:

$$\frac{\partial}{\partial y} p|_0 = ik(\psi_+ - \psi_-) = 0. \quad (48)$$

Dafür müssen hin- und rücklaufende Wellen gleich laut sein, z.B. $\psi_- = \psi_+ = \frac{1}{2}$:

$$p = \frac{1}{2} e^{-ikx} + \frac{1}{2} e^{+ikx} = \cos(kx). \quad (49)$$

Für die Stelle $x = L$ haben wir die Forderung

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos(kx)|_L = -k \sin(kx) = 0, \quad (50)$$

es gibt also nur homogene Lösungen an den Wellenzahlen an denen der Sinus null wird, $k = \frac{\pi}{L} l$, mit $l \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten unabhängige homogenen Lösungen für $l = 0, 1, 2, \dots$

$$p = A \cos\left(\frac{\pi}{L} l x\right), \quad (51)$$

die offensichtlich mit $k = \omega/c = 2\pi f/c$ zu den Frequenzen $f = \frac{c l}{2L}$ gehören. Es sind offenbar im schallhart eingeschlossenen Volumen nur diskrete Moden mit diskreten Frequenzen als homogene Lösungen der Helmholtzgleichung erlaubt.

Homogene Lösung, homogene Randbedingungen 2D. Um brauchbare Lösungen auszuwählen, müssen Bedingungen gestellt werden. Für eine rechteckige Begrenzung mit schallharten Flächen bei $x = \{0, L_x\}$ und $y = \{0, L_y\}$ muss die Schallschnelle normal zu den Bewandungen null werden $v_x|_{x=0, L_x} = 0$, $v_y|_{y=0, L_y} = 0$. Da sie durch die Eulergleichung proportional ist zu den partiellen Ableitungen von p , sind diese Bedingungen äquivalent $\frac{\partial}{\partial x} p|_{x=0, L_x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} p|_{y=0, L_y} = 0$.

Für den Produkt-Exponentialansatz $p = p(x)p(y)$, $p(x) = e^{-ik_x x}$, $p(y) = e^{-ik_y y}$ liefert die Helmholtzgleichung die quadratische Bedingung $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Wieder muss die Superposition der Lösungen aller Vorzeichen $\pm k_x$ und $\pm k_y$ betrachtet werden:

$$p(x) = a e^{ik_x x} + b e^{-ik_x x}, \quad p(y) = c e^{ik_y y} + d e^{-ik_y y}. \quad (52)$$

Wie zuvor für das beidseitig schallhart abgeschlossene Rohr erfüllt sich die Randbedingung mit $a = b = \frac{1}{2}$ und $c = d = \frac{1}{2}$ und den diskreten, reellwertigen Wellenzahlen $k_x = \frac{\pi}{L_x} l_x$ und $k_y = \frac{\pi}{L_y} l_y$ mit $l_x, l_y = \mathbb{N}_0$. Die gültige Lösung ist somit

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{L_x} l_x x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_y} l_y y\right), \quad (53)$$

und sie ist in Abb. 9 für einige Indizes l_x, l_y zu sehen. Weil die charakteristische Gleichung $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ und $k = 2\pi f/c$ fordert, gibt es ausschließlich diskrete Frequenzen in der homogenen Lösung

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l_y}{L_y}\right)^2}, \quad (54)$$

allerdings nicht mehr harmonisch. Die Lösung ist daher definitiv nicht mehr periodisch in der Zeit, aus den eingeschränkten Frequenzen ist aber herauszulesen, dass es eine zeitliche Struktur gibt.

Homogene Lösung, homogene Randbedingungen 3D. Eine ähnliche Lösung ergibt sich in 3 Dimensionen. Im Zeitbereich:

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{L_x} l_x x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_y} l_y y\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_z} l_z z\right) e^{i2\pi f[l_x, l_y, l_z] t}, \quad (55)$$

$$f[l_x, l_y, l_z] = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l_z}{L_z}\right)^2}.$$

7.1 Inhomogene Lösung, homogene Randbedingungen: D-dimensionaler Quaderraum

Für die inhomogene Wellengleichung in D Dimensionen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = -\delta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

mit schallharten Randbedingungen an den Stellen 0 und L_i in jeder kartesischen Koordinate, $\frac{\partial}{\partial x_i} G|_{\{0, L_i\}} = 0$, $\forall i = 0, \dots, D-1$, kennen wir zumindest von oben die orthogonalen homogenen Lösung für den Ort, im Fourierbereich. Wir schreiben das um zu einer orthonormalen Lösungsbasis

$$\psi_j(\mathbf{r}) = \prod_{i=0}^{D-1} \cos\left(\frac{\pi}{L_i} l_i x_i\right) \sqrt{\frac{2 - \delta_{l_i}}{L_i}},$$

für das begrenzte Volumen, $\int_V \psi_j(\mathbf{r}) \psi_{j'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{jj'}$, und wir verwenden verkürzt den Modenindex $j = j(l_0, \dots, l_{D-1})$. Wir nehmen an, dass sich partikuläre Lösung G im Zeitbereich aus den mit $\gamma_j(\omega)$ gewichteten Komponenten zusammensetzt

$$G = \int \sum_j \gamma_j \psi_j(\mathbf{r}) e^{i\omega t} d\omega.$$

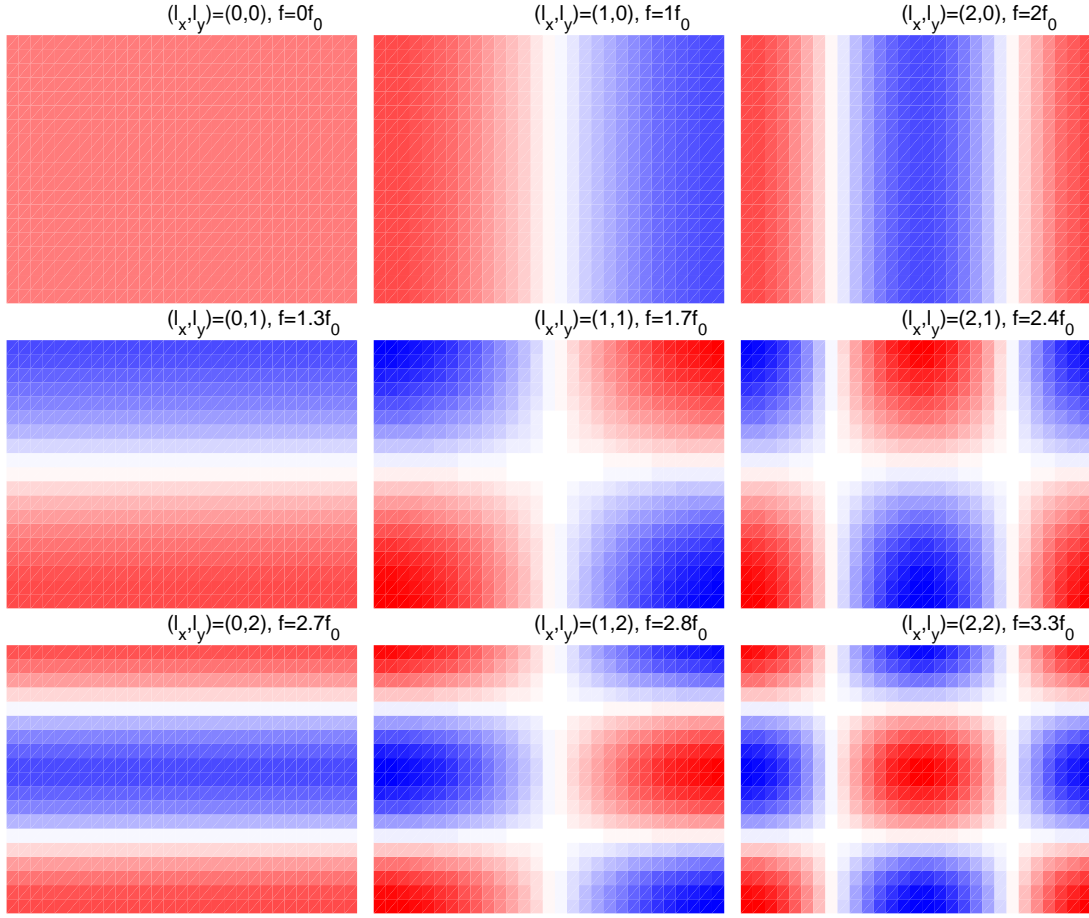


Abbildung 9: Moden für den rechteckigen Raum in 2D mit schallharten Wänden.

Nach Einsetzen in die Wellengleichung ergibt sich wegen $\Delta\psi_j(\mathbf{r}) = -\omega_j^2/c^2\psi_j(\mathbf{r})$, $\omega_j^2/c^2 = \sum_i \left(\frac{\pi}{L_i}l_i\right)^2$, und $\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{i\omega t} = -\omega^2e^{i\omega t}$

$$\int \sum_j \frac{\gamma}{c^2} [\omega^2 - \omega_j^2] \psi_j(\mathbf{r}) e^{i\omega t} d\omega = -\delta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Transformation $\psi_{j'}(\mathbf{r})e^{-i\omega't} d\mathbf{r} dt$ ergibt

$$\sum \int \frac{\gamma}{c^2} (\omega^2 - \omega_j^2) \underbrace{\left[\int \psi_j(\mathbf{r}) \psi_{j'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]}_{\delta_{jj'}} \underbrace{\left[\int e^{i(\omega - \omega')t} dt \right]}_{2\pi\delta(\omega - \omega')} d\omega = - \underbrace{\int \delta(t) e^{-i\omega't} dt}_1 \underbrace{\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \psi_{j'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}_{\psi_{j'}(\mathbf{r}_0)}.$$

Hiermit zerfällt Summe und Integral, und der gesuchte Koeffizient ist partialbruchzerlegt

$$\gamma = -\frac{c^2}{2\pi} \frac{\psi_j(\mathbf{r}_0)}{\omega^2 - \omega_j^2} = -\frac{c^2\psi_j(\mathbf{r}_0)}{4\pi\omega_j} \left[\frac{1}{\omega - \omega_j} - \frac{1}{\omega + \omega_j} \right].$$

Damit ist G bestimmt, muss aber für eine kausale Lösung noch rücktransformiert werden:

$$G = -\sum_j \frac{c^2\psi_j(\mathbf{r}_0)\psi_j(\mathbf{r})}{4\pi\omega_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_j} - \frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_j} \right] d\omega. \quad (56)$$

Dazu wird mit dem Lemma von Jordan gearbeitet: das uneigentliche Integral über ω darf zu einem Kurvenintegral C ergänzt werden, das sich über einen unendlich großen Halbkreis in der komplexen ω -Ebene schließt, sofern der

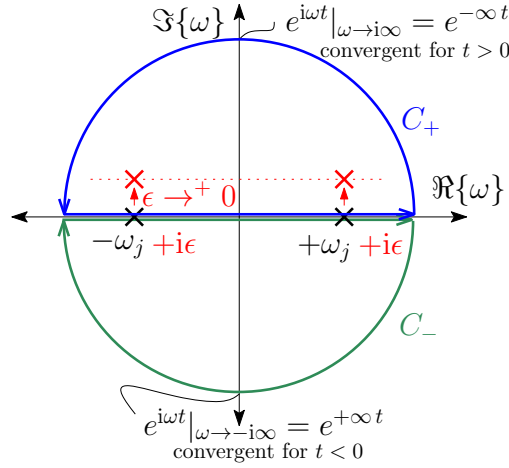


Abbildung 10: Komplexes Konturintegral C_+ für eine kausale Lösung bei $t \geq 0$ mit der Regularisierung $\lim_{\epsilon \rightarrow +0}$ beider Polstellen zu $\omega_{1,2} = \pm\omega_j + i\epsilon$, und verschwindendes Konturintegral C_- für $t < 0$.

Integrand verschwindet. Für den Integranden $e^{i\omega t}$ darf der Halbkreis des Pfades C_+ für positive Zeit über die positive Imaginärachse laufen, da er für $\omega \rightarrow i\infty$ verschwindet. Entsprechend muss der Halbkreis des Pfades C_- (negative Zeit) über die negative Imaginärachse laufen.

Weder im Pfadintegral C_+ noch C_- dürfen wir über die Unendlichkeitsstellen $\pm\omega_j$ integrieren. Wir verschieben die Pole daher um ein kleines Stück ins Innere des Kurvenintegrals C_+ . So ergibt die Cauchy'sche Integralformel $\oint \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = 2\pi i f(\omega_0)$ zur Integration der analytischen Funktion $f(\omega) = e^{i\omega t}$ um die Polstellen $\pm\omega_0$ eine kausale Lösung, die bei negativer Zeit C_- verschwindet. Mit der Sprungfunktion $u(t)$ notiert ist sie

$$\begin{aligned}
G &= - \sum_j \frac{2\pi i c^2 \psi_j(\mathbf{r}_0) \psi_j(\mathbf{r})}{4\pi 2\omega_j} u(t) \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[e^{(i\omega_j - \epsilon)t} - e^{(-i\omega_j - \epsilon)t} \right] \\
&= c^2 \sum_j \psi_j(\mathbf{r}_0) \psi_j(\mathbf{r}) u(t) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{-\epsilon t} \\
&= c^2 \sum_j \psi_j(\mathbf{r}_0) \psi_j(\mathbf{r}) u(t) \text{sinc}(\omega_j t) t \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{-\epsilon t}. \tag{57}
\end{aligned}$$

Eine Dämpfung $\epsilon > 0$ simuliert endliche Nachhallzeit. Ohne Dämpfung wird die Randbedingung genau eingehalten, und es sind nurmehr die diskreten Frequenzen ω_j erlaubt.

Spiegelquellenmethode: Im Anhang des Artikels von Allen und Berkley 1979 wird die Spiegelquellenmethode (image source method) auch aus dieser Formel hergeleitet. Dazu gehen Allen und Berkeley einen anderen Weg.

Das Produkt aus den Kosinusfunktionen aller ganzzahligen Wellenzahlen entspricht einer spiegelperiodischen Serie aus Deltadistributionen im Ortsbereich. $\sum_j \psi_j(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}_0) = \prod_{i=0}^{D-1} \sum_{m_i} \frac{\delta(x_i \mp x_{0i} + 2m_i L_{x_i})}{2^D}$. Der Multiplikations-/Faltungssatz ermöglicht die Interpretation, dass die diskreten Wellenzahlen erst durch die Multiplikation eines kontinuierlichen Wellenzahlspektrums mit einem Kamm aus Deltadistributionen an diskreten Wellenzahl zustande kommt. Der Rechnung von Allen und Berkley nach muss die örtliche Lösung eine spiegelperiodische Verschiebung einer einzigen Lösung für das Freifeld sein:

$$G = G_{\text{DD}}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \star \prod_{i=0}^{D-1} \sum_{m_i} \frac{\delta(x_i \mp x_{0i} + 2m_i L_{x_i})}{2^D}. \tag{58}$$

In Implementierungen der Formeln mit endlichem Aufwand tritt der wesentliche Unterschied der modalen Lösung und der Spiegelquellenlösung zum Vorschein: Eine endliche Summation deckt in der modalen Formulierung einen endlichen Frequenzbereich ab, wobei die endliche Summation der Spiegelquellenmethode einen endlichen Zeitbereich abdeckt. Im Grenzübergang nach Unendlich wären beide Formulierungen äquivalent.

Ohne analytische Berechnung ist die Spiegelquellenmethode wenig überraschend: eine Spiegelung einer Quelle an einer Koordinate bewirkt ein an dieser Koordinate symmetrisches Feld. Dadurch ist die Ableitung in die

Spiegelungsrichtung und eine schallharte Randbedingung erfüllt. Um weitere schallharte Randbedingungen an einer dazu parallelen Stelle zu erfüllen, wäre eine Spiegelung an dieser Stelle denkbar. Die zerstört aber die erste Randbedingung. An den parallelen Randbedingungen müssen unendlich viele Hin- und Hergespiegelungen erfolgen, damit beide Randbedingungen gleichzeitig erfüllt werden.

8 Wellengleichung in sphärischen Koordinaten

Der Laplace-Operator als Operator, der die räumliche Krümmung einer Funktion bestimmt, muss für krummlinige Koordinatensysteme mit der verallgemeinerten Kettenregel umgeformt werden.

8.1 Laplacian in orthogonal coordinates

In general, coordinates can be expressed by n-tuples of values. For instance, the Cartesian coordinates are (x_1, x_2, \dots) and coordinates of another coordinate systems are (u_1, u_2, \dots) , and both describe the location of a point in a space depending on a finite number of dimensions. Each location of the space should be accessible by both coordinate systems and there should be a bijective mapping between both systems, e.g. $u_j = u_j(x_1, x_2, \dots)$. A single differentiation with regard to the component x_i , for instance, is described by the chain rule and consists of the sum of weighted partial differentials with regard to u_j :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (59)$$

Written in terms of vectors, the (Cartesian) gradient $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ with $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}$ yields:

$$\nabla = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} := \mathbf{J}_{\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}, \quad (60)$$

for which the Jacobian matrix $\mathbf{J}_{\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{ij}$ that is either written in dependency of \mathbf{x} or \mathbf{u} represents all the partial derivatives of the mapping between the coordinate systems. For bijective mappings also Jacobian of the inverse mapping exists $\mathbf{J}_{\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{u}} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right]_{ji}$. The coordinate systems are equivalent if the determinant of the Jacobian is non-zero $|\mathbf{J}| \neq 0$.

Orthogonal coordinate systems have the interesting property that the rows of the Jacobian (or its columns) are orthogonal, so that $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ yields a diagonal matrix. With $\mathbf{J}_{\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{u}}$ the meaning of this property becomes easier to understand: the differential changes in the location $\partial \mathbf{x} / \partial u_j$ of each Cartesian coordinate into the direction of each individual non-Cartesian coordinate u_j describes an orthogonal set of motion directions in space, whose orientation depends on the location and whose individual lengths may vary.

To obtain a description of the Laplacian in the Helmholtz equation $\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ is our goal here, and it can be obtained with the chain rule, now calculating from x_i to u_j ,

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}, \\ \text{with } \sum_{i,j,k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} &= \mathbf{1}^T \left[\underbrace{(\mathbf{J}^T \mathbf{J})}_{\text{ortho:diag}} \circ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \right] = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}, \end{aligned} \quad (61)$$

with \circ denoting the element-wise, i.e. Hadamard product. Orthogonal coordinates largely simplify the Laplacian (see last line) and make it consist of first- and second-order differentials with regard to the new coordinates, individually, with all mixed derivatives canceling. Both first- and second-order differentials are weighted by the partial derivatives of the coordinate mapping. For each u_j , the Laplacian is composed of those two expressions

$$\Delta = \sum_j \Delta_{u_j}, \quad \text{where } \Delta_{u_j} = \left[\sum_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \right] \frac{\partial}{\partial u_j} + \left[\sum_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}. \quad (62)$$

8.2 Laplacian in spherical coordinates

The right-handed spherical coordinate systems in ISO31-11, ISO80000-2, uses a radius r , an azimuth angle φ , and a zenith angle ϑ , mapping to Cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= r \cos \vartheta & \vartheta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \end{aligned} \quad (63)$$

Re-expressing the zenith angle coordinate by $\zeta = \cos \vartheta = \frac{z}{r}$ reduces the effort in calculation and yields $x = r \cos \varphi \sqrt{1 - \zeta^2}$, $y = r \sin \varphi \sqrt{1 - \zeta^2}$, $z = r \zeta$.

In order to obtain solutions along the angular dimensions azimuth and zenith, we first need to re-write the Laplacian from Cartesian to spherical coordinates. For first-order derivative along the x axis, we get the generalized differential

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left[\frac{\partial r}{\partial x} \right] \frac{\partial}{\partial r} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

As the Cartesian and spherical coordinates are orthogonal, therefore any mixed second-order derivatives in Cartesian or spherical coordinates vanish. We may derive a second time wrt. x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] &= \left[\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\partial}{\partial r} \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Obviously, we require all first-order derivatives squared, and all second-order derivatives of the spherical coordinates.

8.3 The radial part

With $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ we obtain for the radial part $\Delta_r = \left[\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\partial}{\partial r}$ of the Laplacian

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial r}{\partial x} \right]^2 &= \left[\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} \right]^2 = \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x \right]^2 = \left[\frac{x}{r} \right]^2 = \frac{x^2}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - x \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}. \end{aligned}$$

For x, y, z altogether, this is for:

$$\Delta_r = \left[\frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} \right] \frac{\partial}{\partial r} + \left[\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (64)$$

2D. In two dimensions, there is no z coordinate, therefore there is just one term fewer:

$$\Delta_{r,2D} = \left[\frac{2r^2 - x^2 - y^2}{r^3} \right] \frac{\partial}{\partial r} + \left[\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (65)$$

8.4 The azimuthal part

With $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ and $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$, the azimuthal part $\Delta_\varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}$ of the Laplacian becomes

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^2 &= \left[\frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial x} \right]^2 = \left[\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x} \right]^2 = \left[-\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y}{x^2} \right]^2 = \left[-\frac{y}{r_{xy}^2} \right]^2 = \frac{y^2}{r_{xy}^4}, \\ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]^2 &= \left[\frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial y} \right]^2 = \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x} \right]^2 = \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} \right]^2 = \left[\frac{x}{r_{xy}^2} \right]^2 = \frac{x^2}{r_{xy}^4}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{y}{r_{xy}^2} \right] = \frac{2xy}{r_{xy}^3}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{r_{xy}^2} \right] = -\frac{2xy}{r_{xy}^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

It only depends on x and y , and altogether, we obtain

$$\Delta_\varphi = \left[\frac{2xy - 2xy}{r_{xy}^3} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left[\frac{x^2 + y^2}{r_{xy}^4} \right] \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r_{xy}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2(1 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (66)$$

2D. In two dimensions, $\zeta = 0$, therefore

$$\Delta_{\varphi, 2D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (67)$$

8.5 The zenithal part

The zenith angle is actually ϑ , and we define $\zeta = \cos \vartheta$ as a variable to express it in order to simplify the derivation. With $\zeta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$, the zenithal part $\Delta_\zeta = \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta}$ becomes

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right]^2 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r} \right]^2 = \left[-\frac{z}{r^2} \frac{x}{r} \right]^2 = \left[-\frac{xz}{r^3} \right]^2 = \frac{x^2 z^2}{r^6}, \\ \left[\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right]^2 &= \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r} \right]^2 = \left[\frac{1}{r} - \frac{z}{r^2} \frac{z}{r} \right]^2 = \left[\frac{r^2 - z^2}{r^3} \right]^2 = \left[\frac{r_{xy}^2}{r^3} \right]^2 = \frac{r_{xy}^4}{r^6}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{xz}{r^3} \right] = -\frac{z}{r^3} + 3xz \frac{1}{r^4} \frac{x}{r} = z \frac{3x^2 - r^2}{r^5}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{r_{xy}^2}{r^3} \right] = -3 \frac{r_{xy}^2}{r^4} \frac{z}{r} = -z \frac{3r_{xy}^2}{r^5}. \end{aligned}$$

For x , y , and z altogether, we get

$$\begin{aligned} \Delta_\zeta &= z \frac{3x^2 + 3y^2 - 2r^2 - 3r_{xy}^2}{r^5} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{(x^2 + y^2)z^2 + r_{xy}^4}{r^6} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} = -\frac{2r^2}{r^5} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{r^2 r_{xy}^2}{r^6} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ &= -z \frac{2}{r^3} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{r^2(1 - \zeta^2)}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} = -\frac{2}{r^2} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1 - \zeta^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \end{aligned} \quad (68)$$

8.6 Differential equation defining the spherical harmonics

The spherical harmonics are harmonics depending only on angular terms. With $\zeta = \cos \vartheta$, we may superimpose both parts $\Delta_{\varphi\zeta} = \Delta_\varphi + \Delta_\zeta$ of the Laplacian and solve the eigenproblem $r^2 \Delta_{\varphi\zeta} Y = -\lambda Y$

$$\frac{1}{1 - \zeta^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y - 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} Y + (1 - \zeta^2) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} Y = -\lambda Y.$$

We assume Y to be a product of the azimuth harmonics $\Phi_m(\varphi)$ from above and undefined zenith harmonics $\Theta(\zeta)$

$$Y = \Phi_m \Theta, \quad (69)$$

which yields a differential equation ($\partial \rightarrow d$) only in ζ after inserting $\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi_m = -m^2 \Phi_m$

$$\Theta \frac{-m^2}{1 - \zeta^2} \Phi_m - 2\zeta \Phi_m \frac{d}{d\zeta} \Theta + (1 - \zeta^2) \Phi_m \frac{d^2}{d\zeta^2} \Theta = -\lambda \Phi_m \Theta.$$

And after dividing by Φ_m , we obtain the *associated Legendre differential equation*

$$\begin{aligned} \frac{-m^2}{1 - \zeta^2} \Theta - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} \Theta + (1 - \zeta^2) \frac{d^2}{d\zeta^2} \Theta &= -\lambda \Theta, \\ \left[(1 - \zeta^2) \frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} + \lambda - \frac{m^2}{1 - \zeta^2} \right] \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

8.7 Zenithal solution: Associated Legendre differential equation

The associated Legendre differential equation (written in x and y for mathematical simplicity) is

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0,$$

or after gathering the derivatives

$$[(1-x^2)y']' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0.$$

Simplifying the differential equation by $\frac{1}{1-x^2}$. In the associated Legendre differential equation, we would like to get rid of the denominator $\frac{1}{1-x^2}$. In this case, it is typical to substitute $y = (1-x^2)^\alpha v$ and try out which α succeeds. For insertion into the differential equation, the derivative of y is

$$y' = -\alpha(1-x^2)^{\alpha-1}2xv + (1-x^2)^\alpha v' = -2\alpha(1-x^2)^{\alpha-1}xv + (1-x^2)^\alpha v',$$

and the second-order derivative term is

$$\begin{aligned} [(1-x^2)y']' &= [-2\alpha(1-x^2)^\alpha xv + (1-x^2)^{\alpha+1}v']' \\ &= 4\alpha^2(1-x^2)^{\alpha-1}x^2v - 2\alpha(1-x^2)^\alpha v - 2\alpha(1-x^2)^\alpha xv' \\ &\quad - 2(\alpha+1)(1-x^2)^\alpha xv' + (1-x^2)^{\alpha+1}v'' \\ &= (1-x^2)^\alpha \left[\frac{4\alpha^2}{1-x^2}x^2v - 2\alpha v - 2(2\alpha+1)xv' + (1-x^2)v'' \right]. \end{aligned}$$

Together with the term $[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}]y$, the associated Legendre differential equation becomes

$$\begin{aligned} (1-x^2)^\alpha \left[\frac{4\alpha^2}{1-x^2}x^2v - 2\alpha v + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)v - 2(2\alpha+1)xv' + (1-x^2)v'' \right] &= 0 \\ -m^2 \frac{1 - \frac{4\alpha^2}{m^2}x^2}{1-x^2}v + (\lambda - 2\alpha)v - 2(2\alpha+1)xv' + (1-x^2)v'' &= 0. \end{aligned}$$

We see that the term $\frac{1}{1-x^2}$ entirely cancels by $\alpha = \frac{m}{2}$, which fixes the substitution

$$y = \sqrt{1-x^2}^m v. \quad (71)$$

Note that for rotational symmetric solutions around the Cartesian z coordinate, the choice of $m = 0$ would ensure a constant azimuthal part $\Phi_m = \text{const}$. Re-inserting $x = \zeta = \cos \vartheta$, the preceding term $\sqrt{1-\cos^2 \vartheta}^m = \sin^m \vartheta$ is understandably required to represent shapes that aren't rotationally symmetric around z , but any other, freely rotated axis, for which we also required the sinusoids in 2D. The differential equation for $v = v(\cos \vartheta)$ is

$$(1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' + [\lambda - m(m+1)]v = 0. \quad (72)$$

Still, the above equation is singular at $x \pm 1$, which means that the second-derivative term multiplied by $(1-x^2)$ vanishes there, rendering the differential equation into a first-order differential equation, locally. Instead of the more comprehensive Frobenius method we keep it simple: Desired spherical polynomials $Y_n^m = \Phi_m \Theta_n^m = \mathcal{P}_n(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ with $\Phi_m(\varphi) \propto \frac{1}{\sqrt{1-\theta_z^2}^m} \begin{pmatrix} \theta_x & -\theta_y \\ \theta_y & \theta_x \end{pmatrix}^{m-1} \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{P}_m(\theta_x, \theta_y)}{\sqrt{1-\theta_z^2}^m}$ imply that Θ_n^m must contain $\sqrt{1-\theta_z^2}^m \mathcal{P}_{n-m}(\theta_z)$ to be polynomial and n^{th} -order: here $y = \sqrt{1-x^2}^m \sum_{k=0}^{n-m} a_k x^k$.

Power-series for v . With $v = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, we get after inserting and deriving

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2(m+1)x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ + [\lambda - m(m+1)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0, \\ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - 2(m+1) \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k \\ + [\lambda - m(m+1)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0. \end{aligned}$$

For $k \geq 2$, all sum terms are present and the comparison of coefficients for the k^{th} power yields:

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2) a_{k+2} &= [k(k-1) + 2(m+1)k - [\lambda - m(m+1)]] a_k \\ a_{k+2} &= \frac{k(k+2m+1) + m(m+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k. \end{aligned}$$

Typically for such a two-step recurrence, two starting conditions $a_0 = 1, a_1 = 0$ and $a_0 = 0, a_1 = 1$ yield a pair of linearly independent solutions (even and odd).

If the series in x should converge, it will most certainly do so when v is *polynomial* and stops at some order. To design y to be of some arbitrary finite order $n \in \mathbb{Z}$, we take into account that $\sqrt{1-x^2}^m$ is of m^{th} order already, so the polynomial v must be $(n-m)^{\text{th}}$ order, and $|m| \leq n$. The series is forced to stop the coefficient a_k for $k = n-m$ if the numerator is forced to become zero by a suitably chosen λ , thus $\lambda = (n-m)(n+m+1) + m(m+1) = n(n+1)$. Corresponding to the termination either at an even or odd $k = n-m$, even $a_0 = 1, a_1 = 0$ or odd $a_0 = 0, a_1 = 1$ starting conditions must be chosen. The otherwise wrong-parity solution is an infinite series [?, Eq. 3.2.45] whose convergence radius R indicates singularities at $x = \pm 1$,

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+2m+1) - m(m+1) - n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 + \dots}{k^2 + \dots} = 1. \quad (73)$$

Using $\lambda = n(n+1)$ and writing the differentials in condensed form, the defining differential equations for associated Legendre functions P_n^m (m is no exponent but a second index) and their polynomial part v_n^m become

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^m \right] + \left[n(n+1) - \frac{m(m+1)}{1-x^2} \right] P_n^m = 0, \quad (74)$$

$$(1-x^2)^{-m} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{m+1} \frac{d}{dx} v_n^m \right] + [n(n+1) - m(m+1)] v_n^m = 0. \quad (75)$$

Orthogonality of associated Legendre functions. The resulting associated Legendre differential equation

$$\left[(1-x^2) [P_n^m]' \right]' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m = 0,$$

yields a sequence of finite-order functions P_n^m with the order $n \in \mathbb{N}_0$ and $|m| \leq n$. Before even defining these functions, we can prove their orthogonality $\int_{-1}^1 P_n^m P_l^m dx = 0$ for $n \neq l$. This means no product of a pair of associated Legendre functions of different indices $n \neq l$ produces any constant part on $x \in [-1; 1]$, and P_n^m and P_l^m do not contain shapes of the respective other function. This is important to uniquely decompose shapes and to define transformation integrals. We multiply the differential equation with P_l^m and integrate it over x

$$\int_{-1}^1 \left[(1-x^2) [P_n^m]' \right]' P_l^m dx + \int_{-1}^1 \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m P_l^m dx = 0.$$

Integration by parts of the first integral yields

$$\int_{-1}^1 \left[(1-x^2) [P_n^m]' \right]' P_l^m dx = \underbrace{(1-x^2) [P_n^m]' P_l^m}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) [P_n^m]' [P_l^m]' dx, \quad (76)$$

where the vanishing part is because of $(1 - x^2) = 0$ at the endpoints $x = \pm 1$ where $[P_n^m]'$ and P_l^m are finite. We get

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) [P_n^m]' [P_l^m]' dx = \int_{-1}^1 \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m P_l^m dx.$$

We could have arrived at an alternative expression, with the only difference in $l(l+1)$ instead of $n(n+1)$,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) [P_l^m]' [P_n^m]' dx = \int_{-1}^1 \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m P_n^m dx,$$

if we had started integrating the differential equation of P_l^m over P_n^m , instead. The difference of both equations is

$$[n(n+1) - l(l+1)] \int_{-1}^1 P_n^m P_l^m dx = 0,$$

and the scalar in brackets only vanishes for $n = l$. For the equation to hold at other $n \neq l$, we conclude that the associated Legendre functions $\int_{-1}^1 P_n^m P_l^m dx = 0$ must be orthogonal. (Orthogonality needs not hold for different m , as Φ_m achieves this orthogonality in azimuth.)

Solving for polynomial part of associated Legendre functions. To solve the differential equation for the polynomial part v_n^m in a way to arrive at the elegant Rodrigues formula, we first play with a test function

$$u_n = (1 - x^2)^n, \quad \text{differentiated} \quad u_n' = -2nx(1 - x^2)^{n-1} = -2n(1 - x^2)^{-1} x u_n.$$

We may write its derivative as differential equation

$$(1 - x^2)u_n' + 2nxu_n = 0$$

and derive it l times by the Leibniz rule $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ for repeated differentiation of products, with the binomial coefficient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ and $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}$ for simplicity. The few non-zero derivatives of x and $(1 - x^2)$ simplify differentiation, $x' = 1$, $[(1 - x^2)'] = -2x$, $[-2x]' = -2$,

$$\begin{aligned} (1 - x^2)u_n^{(l+1)} + l(-2x)u_n^{(l)} + \frac{(l-1)l}{2}(-2)u_n^{(l-1)} + 2nxu_n^{(l)} + 2nl u_n^{(l-1)} &= 0, \\ (1 - x^2)u_n^{(l+1)} - 2(l-n)xu_n^{(l)} + l(2n-l+1)u_n^{(l-1)} &= 0. \end{aligned}$$

This equation matches $(1 - x^2)v_n^{m+1} - 2(m+1)xv_n^m + [n(n+1) - m(m+1)]v_n^m = 0$ by matching the coefficients $l - n = m + 1$, hence $l = m + n + 1$, which nicely implies $l(2n - l + 1) = n(n + 1) - m(m + 1)$,

$$(1 - x^2)u_n^{(m+n+2)} - 2(m+1)xu_n^{(m+n+1)} + [n(n+1) - m(m+1)]u_n^{(m+n)} = 0.$$

We therefore find the solutions $v_n^m = u_n^{(n+m)} = \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(1 - x^2)^n$ yielding $y_n^m = \sqrt{1 - x^2}^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(1 - x^2)^n$.

Rodrigues formula. By of the above, the Rodrigues formula for the associated Legendre functions P_n^m becomes

$$\begin{aligned} P_n^m &= \frac{(-1)^{n+m}}{2^n n!} \sqrt{1 - x^2}^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(1 - x^2)^n & (77) \\ \text{or } P_n^m &= (-1)^m \sqrt{1 - x^2}^m \frac{d^m}{dx^m} P_n, & \text{with } P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^n. \end{aligned}$$

and $P_n = P_n^0$ are the Legendre polynomials. The Legendre polynomials are normalized to $P_n(1) = 1$ by the factor $\frac{(-1)^n}{2^n n!}$. Because $(1 - x^2)$ is zero at $x = 1$ with any positive integer exponent, only the part of its n -fold derivative that exclusively affects the power of $(1 - x^2)^n$ for n times is responsible for its value there: $n!(-2x)^n(1 - x^2)^0|_{x=1} = n!2^n(-1)^n$. The scaling of the associated Legendre functions with $m > 0$ is somewhat more arbitrary in sign and value.

Indices n and m . The boundaries for the index m of the Legendre functions $m \in \mathbb{Z}$ are typically $-n \leq m \leq n$, however due to the shift of the eigenvalue by $\frac{m^2}{1-x^2}$, functions for positive and negative m are linearly dependent. We observe this by inspecting the highest-order terms in [?]

$$\begin{aligned}
2^n n! \sqrt{1-x^2}^m P_n^m &= (-1)^{n+m} (1-x^2)^m \frac{d^{n+m}(1-x^2)^n}{dx^{n+m}} \\
&= x^{2m} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} \left[x^{2n} - \dots \right] = x^{2m} \left[\frac{(2n)!}{(n-m)!} x^{n-m} - \dots \right] \\
2^n n! \sqrt{1-x^2}^m P_n^{-m} &= (-1)^{n+m} \frac{d^{n-m}(1-x^2)^n}{dx^{n-m}} \\
&= (-1)^m \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left[x^{2n} - \dots \right] = (-1)^m \left[\frac{(2n)!}{(n+m)!} x^{n+m} - \dots \right] \\
\implies P_n^{-m} &= (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m
\end{aligned} \tag{78}$$

and to avoid confusion, it is convenient to only use $m \geq 0$, or $|m|$ to evaluate the associated Legendre functions.

Alternative definition: three-term recurrence. Any polynomial \mathcal{P}_n of the order n can be decomposed into Legendre polynomials $\mathcal{P}_n = \sum_{i=0}^n c_i P_i$, and the Legendre polynomial P_j is orthogonal to all those Legendre polynomials $\int_{-1}^1 \mathcal{P}_n P_j dx = 0$ if $j > n$. With this knowledge it is interesting to describe $\int_{-1}^1 (x P_i) P_j dx$. As $(x P_i)$ is of $(i+1)$ th order, the integral must vanish for $j > i+1$. Because of commutativity, $\int_{-1}^1 P_i (x P_j) dx$, and $(x P_j)$ being $(j+1)$ th order, it also vanishes for $i > j+1$. Hereby, re-expansion of $x P_n$ can maximally use three terms, $x P_n = \alpha P_{n-1} + \gamma P_n + \beta P_{n+1}$. In fact only two terms remain as P_{2k} are even functions on $x \in [-1; 1]$ and P_{2k+1} are odd, thus orthogonal. The product $x P_n$ changes the parity of P_n , leaving $x P_n = \alpha P_{n-1} + \beta P_{n+1}$. At $x = 1$ all polynomials were normalized to $P_i(1) = 1$, therefore evaluation at $x = 1$ leaves $1 = \alpha + \beta$, so $\alpha = 1 - \beta$, hence

$$x P_n = \beta_n P_{n+1} + (1 - \beta_n) P_{n-1}.$$

as also the associated Legendre functions P_n^m for a specific m are orthogonal, the recurrence is more general

$$x P_n^m = \beta_n^m P_{n+1}^m + (1 - \beta_n^m) P_{n-1}^m.$$

To determine the coefficient β_n^m , we only need to find out how the highest-power coefficients x^{n-m+1} of the polynomial parts in $x P_n^m$ and P_{n+1}^m are related. We see this after inserting $P_n = \sqrt{1-x^2}^m \frac{(-1)^{n+m}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1-x^2)^n$ and division by $\sqrt{1-x^2}^m \frac{(-1)^{n+m}}{2^n n!}$, which leaves a recurrence for the polynomial part

$$\underbrace{x v_n^m}_{\mathcal{O}=n-m+1} = - \underbrace{\frac{\beta_n^m}{2(n+1)} v_{n+1}^m}_{\mathcal{O}=n-m+1} - \underbrace{2(n+1)(1-\beta_n^m) v_{n-1}^m}_{\mathcal{O}=n-m-1}.$$

Of the highest powers x^{n-m+1} in both $x v_n^m$ and v_{n+1}^m the coefficients $c_{n,n-m}^m$ and $c_{n+1,n-m+1}^m$ define

$$\beta_n^m = -2(n+1) \frac{c_{n,n-m}^m}{c_{n+1,n-m+1}^m}.$$

To find it, we binomially expand $(1-x^2)^n$ to $(1-x^2)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2(n-k)}$

$$\frac{v_n^m}{(-1)^n} = \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{(2n-2k)! (-1)^k}{(n-m-2k)!} x^{n-m-2k},$$

so that with $k = 0$ we can find $c_{n,n-m}^m = \frac{(-1)^n n!}{n!} \frac{(2n)!}{(n-m)!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n-m)!}$ for the highest-power coefficient of v_n^m . Accordingly, coefficient of the recurrence is

$$\beta_n^m = 2(n+1) \frac{(n-m+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n-m+1}{2n+1},$$

hence with $1 - \beta_n^m = \frac{n+m}{2n+1}$, and $xP_n^m = \frac{n-m+1}{2n+1}P_{n+1}^m + \frac{n+m}{2n+1}P_{n-1}^m$, we can construct P_n^m recursively by

$$P_{n+1}^m = \frac{2n+1}{n-m+1}xP_n^m - \frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m. \quad (79)$$

The start value is $P_n^n = \frac{(-1)^{2n}}{2^n n!} \sqrt{1-x^2}^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(1-x^2)^n = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} \sqrt{1-x^2}^n$, and for $n = m$, the term P_{n-1}^m is excluded.

Normalization. A unity square integral (orthonormalization) simplifies the definition of transform integrals. We would like to obtain the corresponding factor N_n^m with

$$\int_{-1}^1 (P_n^m N_n^m)^2 dx = 1.$$

Normalization for $m = 0$ is easy to find by repeated integration by parts

$$\begin{aligned} \frac{2^{2n} n!^2}{(N_n^0)^2} &= 2^{2n} n!^2 \int_{-1}^1 (P_n^0)^2 dx = \underbrace{[(1-x^2)^n]^{(n-1)} [(1-x^2)^n]^{(n)} \Big|_{-1}^1}_{=0} \\ &\quad - \int_{-1}^1 [(1-x^2)^n]^{(n-1)} [(1-x^2)^n]^{(n)} dx \\ &= \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x^2)^n [(1-x^2)^n]^{(2n)} dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^n (2n)! dx = (2n)! \int_0^\pi \sin^{2n} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

With the integral $\int_0^\pi \sin^{2n+1} \vartheta d\vartheta = 2 \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = 2 \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}$, this is $(N_n^0)^{-2} = \frac{2(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$. For N_n^m , a trick to insert the relation between P_n^m and P_n^{-m} is used [?], and integration by parts until the differentials are of the same order

$$\begin{aligned} \frac{1}{(N_n^m)^2} &= \int_{-1}^1 P_n^m P_n^m dx = \int_{-1}^1 P_n^m \frac{(-1)^m (n-m)!}{(n+m)!} P_n^{-m} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} n!^2} \frac{(-1)^m (n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^1 [(1-x^2)]^{(n+m)} [(1-x^2)]^{(n-m)} dx = \dots \\ &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2^{2n} n!^2} [(1-x^2)]^{(n-m)} [(1-x^2)]^{(n-m)} dx}_{=1/(N_n^0)^2} = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\ \Rightarrow N_n^m &= (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}} \end{aligned} \quad (80)$$

The $(-1)^m$ can be excluded if not used in the Rodrigues formula. (*It is always a wise idea to check and compare signs as conventions may differ... in practice $(-1)^m$ is a rotation around z by 180° .*)

8.8 Spherical harmonics

With all the above definitions, we obtain the fully normalized spherical harmonics

$$Y_n^m(\varphi, \vartheta) = N_n^{|m|} P_n^{|m|}(\cos \vartheta) \Phi_m(\varphi) \quad (81)$$

Orthonormality. They are *orthonormal* when integrated over the sphere

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_n^m Y_{n'}^{m'} d \cos \theta d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (82)$$

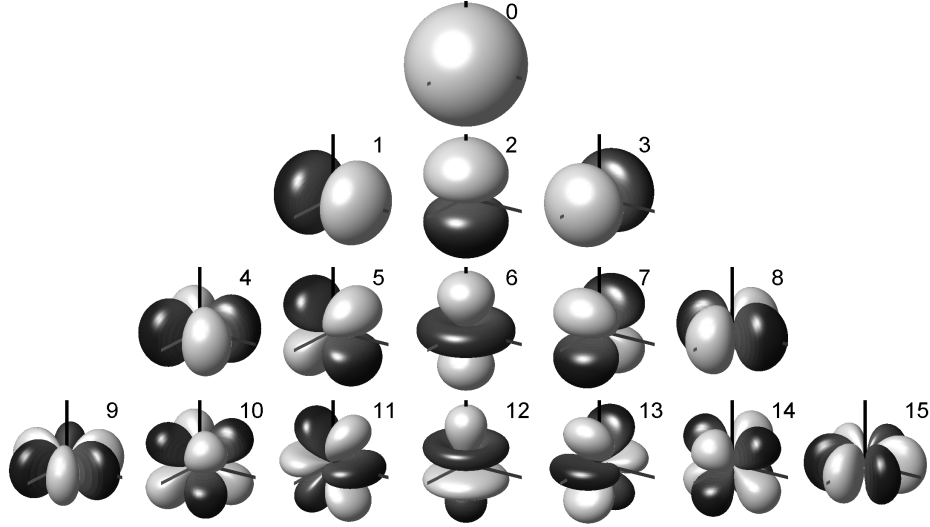


Abbildung 11: Kugelflächenfunktionen als Ballondiagramme aufgetragen: der Radius zeigt den Betrag, die Farbe das Vorzeichen.

Transform integral. Because of their completeness in the Hilbert space, any square-integrable function $g(\varphi, \vartheta)$ can be decomposed by

$$g(\varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \gamma_{n'm'} Y_{n'}^{m'}(\varphi, \vartheta). \quad (83)$$

From a known function $g(\varphi, \vartheta)$, the coefficients are obtained by integrating g with another spherical harmonic Y_n^m over the unit sphere \mathbb{S}^2 , $\int_{-1}^1 d \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$. For a simple notation, we gather the two variables in a direction vector $\boldsymbol{\theta} = [\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta]^T$ and write

$$\int_{\mathbb{S}^2} g(\boldsymbol{\theta}) Y_n^m d\boldsymbol{\theta} = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \gamma_{n'm'} \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} Y_{n'}^{m'} Y_n^m d\boldsymbol{\theta}}_{\delta_{nn'} \delta_{mm'}} = \gamma_{nm}. \quad (84)$$

Parseval's theorem. Due to orthonormality, the integral norm of any pattern $g(\boldsymbol{\theta})$ composed as $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta})$ is equivalent to

$$\int_{\mathbb{S}^2} |g(\boldsymbol{\theta})|^2 d\boldsymbol{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |\gamma_{nm}|^2 \quad (85)$$

because $\int_{\mathbb{S}^2} \sum_{n,n',m,m'} \gamma_{nm} \gamma_{n'm'}^* Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) Y_{n'}^{m'}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \sum_{n,n',m,m'} \gamma_{nm} \gamma_{n'm'}^* \delta_{nn'} \delta_{mm'}$.

8.9 Radial solution of the Helmholtz equation

The radial part of the Helmholtz equation in spherical coordinates is characterized by the spherical Bessel differential equation in $x = kr$

$$y'' + 2x^{-1} y' + [1 - n(n+1)x^{-2}]y = 0. \quad (86)$$

Recursive construction. For $n = 0$, we know that the omnidirectional Green's function is a solution diverging from $x = 0$, and it is proportional to $y \propto \frac{e^{-ix}}{x}$. We can simplify the equation by inserting $y = x^{-1} u_n$, which yields with $y' = x^{-1} u_n' - x^{-2} u_n$ and $y'' = x^{-1} u_n'' - 2x^{-2} u_n' + 2x^{-3} u_n$ after multiplying with x :

$$\begin{aligned} u_n'' - 2x^{-1} u_n' + 2x^{-2} u_n + 2x^{-1} u_n' - 2x^{-2} u_n + [1 - n(n+1)x^{-2}]u_n &= 0 \\ u_n'' + [1 - n(n+1)x^{-2}]u_n &= 0. \end{aligned} \quad (87)$$

Moreover, we attempt to find a recursive definition for $n > 0$ using the approach

$$y_n = u_n, \quad u_n = -x^a [x^{-a} u_{n-1}]'.$$

We evaluate the recursion for the derivatives

$$\begin{aligned} u_n &= -u'_{n-1} + a x^{-1} u_{n-1}, \\ u'_n &= -u''_{n-1} + a x^{-1} u'_{n-1} - a x^{-2} u_{n-1}, \quad \text{with } -u''_{n-1} = [1 - n(n-1)x^{-2}]u_{n-1} \\ &= a x^{-1} u'_{n-1} + \{1 - [n(n-1) + a]x^{-2}\} u_{n-1} \\ u''_n &= a x^{-1} u''_{n-1} - a x^{-2} u'_{n-1} + \{1 - [n(n-1) + a]x^{-2}\} u'_{n-1} + 2[n(n-1) + a]x^{-3} u_{n-1} \\ &= \{1 - [n(n-1) + 2a]x^{-2}\} u'_{n-1} + \{[2n(n-1) + 2a + an(n-1)]x^{-3} - a x^{-1}\} u_{n-1} \\ &= \{1 - [n(n-1) + 2a]x^{-2}\} u'_{n-1} + \{[n(n-1)(a+2) + 2a]x^{-3} - a x^{-1}\} u_{n-1} \end{aligned}$$

The equation $u''_n + [1 - n(n+1)x^{-2}]u_n = 0$ using the above expressions becomes

$$\begin{aligned} \{1 - [n(n-1) + 2a]x^{-2}\} u'_{n-1} + \{[n(n-1)(a+2) + 2a]x^{-3} - a x^{-1}\} u_{n-1} \\ + [1 - n(n+1)x^{-2}] [-u'_{n-1} + a x^{-1} u_{n-1}] = 0. \end{aligned}$$

Comparing coefficients for u'_{n-1} and u_{n-1} yields $a = n$

$$\begin{aligned} u'_{n-1} : \quad & 1 - 1 - [n(n-1) + 2a - n(n+1)]x^{-2} = 2(a-n)x^{-2} = 0, \\ u_{n-1} : \quad & [-a + a]x^{-1} + [n(n-1)(a+2) + 2a - an(n+1)]x^{-3} = 0 \\ & an(n-1) + 2n(n-1) + 2a(1-n) - an(n-1) = 2(n-a) = 0, \end{aligned}$$

and hereby a recurrence for y_n from $u_n = -x^n [x^{-n} u_{n-1}]'$ with $y_n = x^{-1} u_n$, $u_n = x y_n$,

$$y_n = -x^{n-1} [x^{-(n-1)} y_{n-1}]' \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = -x^n [x^{-n} y_n]'. \quad (88)$$

Singular and regular solution. We know from the Green's function that the omnidirectional solution should be proportional to $g_0 \propto e^{-ix}$. The typical radial solution for an omnidirectional source field is chosen to be the spherical Hankel function of the second kind

$$h_0^{(2)}(kr) = \frac{e^{-ikr}}{-ikr}, \quad h_{n+1}^{(2)}(kr) = -(kr)^n \frac{d}{d(kr)} \left[\frac{1}{(kr)^n} h_n^{(2)}(kr) \right]. \quad (89)$$

However, this solution is not sufficient to solve problems without singularity at $r = 0$. We know that the function $\frac{\sin(kr)}{kr}$ is finite at kr , and so are all real parts of the spherical Hankel functions of the second kind, the spherical Bessel functions

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad j_{n+1}(kr) = -(kr)^n \frac{d}{d(kr)} \left[\frac{1}{(kr)^n} j_n(kr) \right]. \quad (90)$$

The solutions are linearly independent. One check after some calculation that their Wronski determinant is non-zero [?, Eq. 10.50.1]

$$\begin{vmatrix} j_n(kr) & h_n^{(2)}(kr) \\ j'_n(kr) & h_n'^{(2)}(kr) \end{vmatrix} = j_n(kr)h_n'^{(2)}(kr) - j'_n(kr)h_n^{(2)}(kr) = -\frac{i}{(kr)^2}. \quad (91)$$

Below, the Frobenius method is shown as alternative way to get these functions.

Alternative way: Frobenius method. Given a second-order differential equation with singular coefficients, it can be solved by a generalized infinite power series:

$$y'' + \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l \right) x^{-1} y' + \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l \right) x^{-2} y = 0, \quad \text{solution: } y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\gamma}. \quad (92)$$

Insertion of the solution yields

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + \gamma - 1)(k + \gamma)c_k x^{k+\gamma-2} + \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [(k' + \gamma)a_l + b_l]c_{k'} x^{k'+l+\gamma-2} = 0,$$

an index shift $k' + l = k$, and $l = 0 \dots k$ allows to pull out the common factor $x^{k+\gamma-2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k + \gamma - 1)(k + \gamma)c_k + \sum_{l=0}^k [(k - l + \gamma)a_l + b_l]c_{k-l} \right\} x^{k+\gamma-2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ [(k + \gamma + a_0 - 1)(k + \gamma) + b_0]c_k + \sum_{l=1}^k [(k - l + \gamma)a_l + b_l]c_{k-l} \right\} x^{k+\gamma-2} = 0.$$

The coefficient of every exponent of x in the above equation must be zero:

$$\text{indical equation for } k = 0: \quad [(\gamma + a_0 - 1)\gamma + b_0]c_0 = 0, \quad (93)$$

$$\text{indical equation for } k = 1: \quad [(\gamma + a_0)(\gamma + 1) + b_0]c_1 + [a_1\gamma + b_1]c_0 = 0, \quad (94)$$

$$\text{recurrence for } k > 1: \quad -\frac{\sum_{l=1}^k [(k - l + \gamma)a_l + b_l]c_{k-l}}{(k + \gamma + a_0 - 1)(k + \gamma) + b_0} = c_k. \quad (95)$$

Depending on the specific values found for γ , the recurrence, etc. the Frobenius method suggests how to find or construct an independent pair of solutions.

Spherical Bessel differential equation. In $y'' + 2x^{-1}y' + [-n(n + 1) + x^2]x^{-2}y = 0$, all a_l and b_l are zero except $a_0 = 2$, $b_0 = -n(n + 1)$, and $b_2 = 1$. Indical equations and recurrence become

$$[\gamma(\gamma + 1) - n(n + 1)]c_0 = 0, \quad (96)$$

$$[(\gamma + 1)(\gamma + 2) - n(n + 1)]c_1 = 0, \quad (97)$$

$$(k + \gamma + 1)(k + \gamma)c_k = -c_{k-2}. \quad (98)$$

We see that the recurrence is again a two-step recurrence, so that one can choose between an even solution using $c_0 \neq 0, c_1 = 0$ yielding $\gamma = n$ or $\gamma = -(n + 1)$, [or an odd solution that won't be used, with $c_0 = 0, c_1 \neq 0$ yielding $\gamma + 1 = n$ or $\gamma + 1 = -(n + 1)$].

Spherical Bessel functions. The choice $\gamma = n$ yields a solution converging everywhere: Powers of x are all positive, the recurrences $c_k = -\frac{c_{k-2}}{(n+k+1)(n+k)} = \frac{(-1)^k c_0}{(n+k+1)!}$ yield a convergence radius $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k-2}}{c_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (n+k+1)(n+k) = \infty$. With a starting value $c_0 = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}$, solutions are called spherical Bessel functions

$$j_n = (2x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k! [2(n+k)+1]!} x^{2k}. \quad (99)$$

which are a physical set of regular solutions with n -fold zero at 0. The spherical Bessel function for $n = 0$ is

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (100)$$

With the above recursive definition iterated one could define

$$j_{n+1} = -x^n \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^n} j_n \right), \quad j_n = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n j_0. \quad (101)$$

Spherical Neumann functions. For $\gamma = -(n + 1)$ and $c_0 \neq 0, c_1 = 0$, the recurrences are $c_k = -\frac{c_{k-2}}{(n-k+1)(n-k)} = \frac{(-1)^k c_0}{(n-k+1)!}$ and yield the spherical Neumann functions with an $(n + 1)$ -fold pole at 0. They also obey the recursive definition from above,

$$y_0 = -\frac{\cos x}{x}, \quad y_n = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n y_0. \quad (102)$$

Spherical Hankel functions. The spherical Neumann and Bessel functions based on either sin or cos are clearly linearly independent. The spherical Bessel functions are useful to representing fields convergent everywhere. Physical source fields (Green's function) diverge at the source location and exhibit a specific way phase radiates, with $G \propto \frac{e^{-ix}}{x}$. The spherical Bessel and Neumann functions are asymptotically similar to

$$\lim_{x \rightarrow \infty} j_n = (-1)^n \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y_n = (-1)^{n+1} \frac{\cos(x)}{x}, \quad (103)$$

therefore only their combination to spherical Hankel functions of the second kind

$$h_n^{(2)} = j_n - i y_n \quad (104)$$

yields useful physical set of singular solutions. They inherit their $(n + 1)$ -fold pole from the spherical Neumann functions at 0. Their limiting form for large arguments are

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} h_n^{(2)}(x) &= -x^{n-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^{n-1}} h_{n-1}^{(2)} \right) \\ &= -x^{n-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{n-1}{x^n} h_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx} h_{n-1}^{(2)} \right) = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} h_{n-1}^{(2)} \\ &= (-1)^n \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dx^n} h_0^{(2)} = i^n h_0^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (105)$$

With Eqs. (104)(100)(102), the zeroth-order spherical Hankel function is $h_0^{(2)}(x) = \frac{e^{-ix}}{-ix}$.

Alternative implementation by cylindrical functions. We can transform the spherical Bessel differential equation by inserting $y = x^\alpha u$ and obtain after division by x^α

$$\begin{aligned} x^\alpha u'' + 2\alpha x^{\alpha-1} u' + \alpha(\alpha-1)u &+ 2x^{\alpha-1} u' + 2\alpha x^{\alpha-2} u + [1 - n(n+1)x^{-2}]u = 0 \\ u'' + 2\frac{\alpha+1}{x} u' + \left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1) - n(n+1)}{x^2} \right] u &= 0. \end{aligned}$$

For $\alpha = -\frac{1}{2}$, the equation for u becomes the Bessel differential equation with $\alpha(\alpha+1) - n(n+1) = -(n^2 + n + \frac{1}{4}) = -(n + \frac{1}{2})^2$

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left[1 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{x^2} \right] u = 0. \quad (106)$$

Consequently, the spherical Bessel functions and spherical Hankel functions of the second kind can be implemented using the Bessel and Hankel functions that can be found in any standard maths programming library. The specific relations are:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x). \quad (107)$$

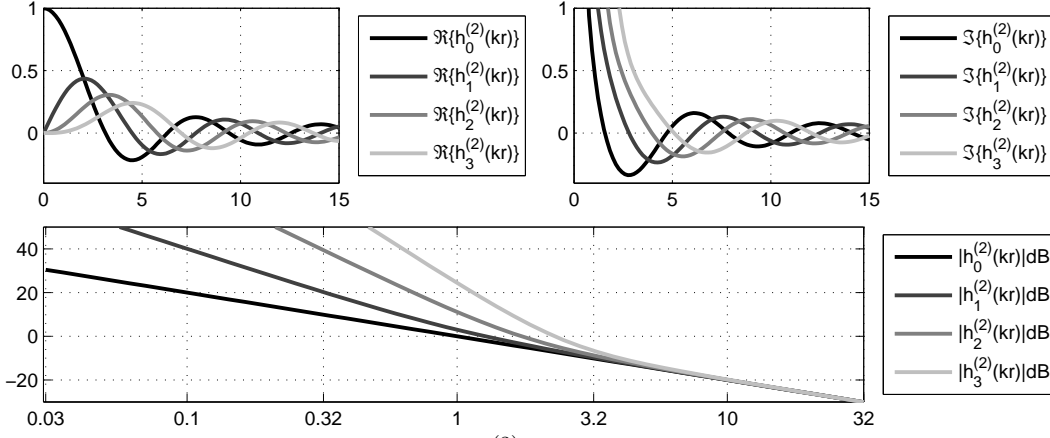


Abbildung 12: Spherical Bessel functions $j_n(kr) = \Re\{h_n^{(2)}(kr)\}$ (top left), imaginary part of spherical Hankel functions $\Im\{h_n^{(2)}(kr)\}$ (top right), and magnitude $|h_n^{(2)}(kr)|$ (bottom).

9 Green's function in spherical solutions, distributions, plane waves

We can write the inhomogeneous Helmholtz equation $(\Delta + k^2)G = -\delta$ to be excited by a source at the direction $\boldsymbol{\theta}_s$ at the radius r_s . We decompose the excitation into a Delta function in radius and direction $-r_s^{-2}\delta(r - r_s)\delta(\boldsymbol{\theta}_s^T \boldsymbol{\theta} - 1)$. The directional part needs not be restricted to the spherical Dirac delta function, so we can take a distribution of sources at r_s , weighted by the panning function $g(\boldsymbol{\theta})$,

$$(\Delta + k^2)p = -r_s^{-2}\delta(r - r_s)g(\boldsymbol{\theta}). \quad (108)$$

From the spherical basis solutions, we know that at a radius other than r_s , p can be expanded into spherical harmonics

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \psi_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta}). \quad (109)$$

Acting on the decomposition of p , the directional part of the Laplacian will yield the eigenvalue $\Delta_{\varphi,\zeta} Y_n^m = -n(n+1)r^{-2}Y_n^m$ of the spherical harmonics, and its radial part $r^2\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}$, as around Eq. (??), hence

$$\begin{aligned} & (\Delta + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \psi_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \psi_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) = -r_s^{-2}\delta(r - r_s)g(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Obviously, ψ_{nm} must depend on k and r , so we may pull the factor k into the differentials $\frac{d}{dr} = k\frac{d}{dkr}$ to get the differential operator $k^2\left[\frac{d^2}{d(kr)^2} + \frac{2}{kr}\frac{d}{d(kr)} + 1 - \frac{n(n+1)}{(kr)^2}\right]$ and observe kr as its variable on the left, and we replace kr by x for brevity. Applying the factor k^{-2} and the spherical harmonics transform $\int_{\mathbb{S}^2} Y_n^{m'}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$ on the equation removes the double sum on the left (orthogonality) and decomposes the panning function $g(\boldsymbol{\theta})$ on the right into γ_{nm}

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] \psi_{nm} = -(kr_s)^{-2}\delta(r - r_s)\gamma_{nm}.$$

We collect the x -independent term γ_{nm} as factors of the solution $\psi_{nm} = y\gamma_{nm}$ and get

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]y = -x_0^{-2}\delta(r - r_s), \quad (110)$$

the inhomogeneous spherical Bessel differential equation. As described, e.g., in Kreyszig, the inhomogeneous differential equation can be solved by the Lagrangian *variation of the parameters* for equations of the type $y'' + py' + qy = r$, knowing its independent solutions $y_1 = h_n^{(2)}(x)$ and $y_2 = j_n(x)$.

It uses a solution $y = uy_1 + vy_2$ with variable parameters u and v , which upon first and second-order differentiation becomes

$$\begin{aligned} y &= uy_1 + vy_2, & y' &= uy'_1 + u'y_1 + vy'_2 + v'y_2 \\ y'' &= uy''_1 + 2u'y'_1 + u''y_1 + vy''_2 + 2v'y'_2 + v''y_2. \end{aligned}$$

Inserted into the equation $y'' + py' + qy = r$, this yields

$$\begin{aligned} & \overbrace{u(y''_1 + py'_1 + qy_1)}^{=0} + \overbrace{v(y''_2 + py'_2 + qy_2)}^{=0} + u''y_1 + 2u'y'_1 + v''y_2 + 2v'y'_2 \\ & \hspace{20em} + p(u'y_1 + v'y_2) = \\ (u'y_1 + v'y_2)' + u'y'_1 + v'y'_2 + p(u'y_1 + v'y_2) &= u'y'_1 + v'y'_2 + \left(\frac{d}{dx} + p\right)(u'y_1 + v'y_2) = r. \end{aligned}$$

Now two functions u and v are to be determined from only one equation, so we may pose an additional constraint. The above equation would simplify if the term $(u'y_1 + v'y_2)$ vanished. By this and the simplified equation, we get two conditions

$$\begin{aligned} \text{I :} & \hspace{10em} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ \text{II :} & \hspace{10em} u'y'_1 + v'y'_2 = r \end{aligned}$$

and obtain by elimination with either $A = I y'_1 - II y_1$ or $B = I y'_2 - II y_2$

$$\begin{aligned} \text{A :} & \hspace{10em} \underbrace{v'(y'_1 y_2 - y_1 y'_2)}_{-W} = -r y_1 \\ \text{B :} & \hspace{10em} \underbrace{u'(y'_1 y_2 - y_1 y'_2)}_{-W} = -r y_2. \end{aligned}$$

So that the solution $y = uy_1 + vy_2$ uses $u = \int \frac{r y_2}{W} dx$ and $v = \int \frac{r y_1}{W} dx$. In our case, we have $y_1 = h_n^{(2)}(x)$, $y_2 = j_n(x)$, $r = -x_0^{-2} \delta(r - r_s)$, and the Wronskian $W = (ix^2)^{-1}$ from Eq. (91), hence with integration constants enforcing the physical solutions:

$$y = -h_n^{(2)}(x) \int_0^x ix^2 j_n(x) x_0^{-2} \delta(r - r_s) dx - j_n(x) \int_x^\infty ix^2 h_n^{(2)}(x) x_0^{-2} \delta(r - r_s) dx.$$

To convert $\delta(r - r_s)$ into $\delta(x - x_0)$ with $x = kr$, we use $\int \delta(x) dx = \int \delta(r) dr = 1$ with the integration constant replaced, $\frac{dx}{dr} = k$, hence $dx = k dr$ and obviously by $\int \delta(x) k dr = \int \delta(r) dr$ we find $\delta(r) = k \delta(x)$,

$$\begin{aligned} y &= -h_n^{(2)}(x) \int_0^x ix^2 j_n(x) k x_0^{-2} \delta(x - x_0) dx - j_n(x) \int_x^\infty ix^2 h_n^{(2)}(x) k x_0^{-2} \delta(x - x_0) dx \\ &= -ik \begin{cases} h_n^{(2)}(x) j_n(x_0), & \text{for } x \geq x_0, \\ j_n(x) h_n^{(2)}(x_0) & \text{for } x \leq x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

The solution becomes after re-substituting $x = kr$ and expanding $\psi_{nm} = y \gamma_{nm}$ over the spherical harmonics $p = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n \psi_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta})$:

$$p = -ik \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n \gamma_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) \begin{cases} h_n^{(2)}(kr) j_n(kr_s), & \text{for } r \geq r_s, \\ j_n(kr) h_n^{(2)}(kr_s) & \text{for } r \leq r_s. \end{cases} \quad (111)$$

Green's function. For the Green's function at the direction $\boldsymbol{\theta}_s$, the angular panning function is expanded as $\phi_{nm} = Y_n^m(\boldsymbol{\theta}_s)$, and we get the formulation of the Green's function in terms of spherical basis functions:

$$G = -ik \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\boldsymbol{\theta}_s) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) \begin{cases} h_n^{(2)}(kr) j_n(kr_s) & \text{for } r \geq r_s, \\ j_n(kr) h_n^{(2)}(kr_s) & \text{for } r \leq r_s. \end{cases} \quad (112)$$

Plane waves/far field approximation. Eq. (47) formulates plane waves $p = e^{ik\boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{r}}$ as far-field limit $p = 4\pi \lim_{r_s \rightarrow \infty} \frac{r_s}{e^{-ikr_s}} G = \lim_{r_s \rightarrow \infty} \frac{1}{-ik h_0^{(2)}(kr_s)} G$. Using Eq. (111), a distribution of plane waves driven by the gains $g(\boldsymbol{\theta}) = \sum_n \sum_m \gamma_{nm} Y_n^m$ consequently yields with $\lim_{r_s \rightarrow \infty} h_n^{(2)}(kr_s) = i^n h_0^{(2)}(kr_s)$,

$$\begin{aligned} p &= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n j_n(kr) \left[\lim_{r_s \rightarrow \infty} \frac{h_n^{(2)}(kr_s)}{h_0^{(2)}(kr_s)} \right] Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) \gamma_{nm} \\ &= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n j_n(kr) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) \gamma_{nm}. \end{aligned} \quad (113)$$

or for a single plane-wave direction $\gamma_{nm} = Y_n^m(\boldsymbol{\theta}_s)$

$$p = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n j_n(kr) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) Y_n^m(\boldsymbol{\theta}_s). \quad (114)$$

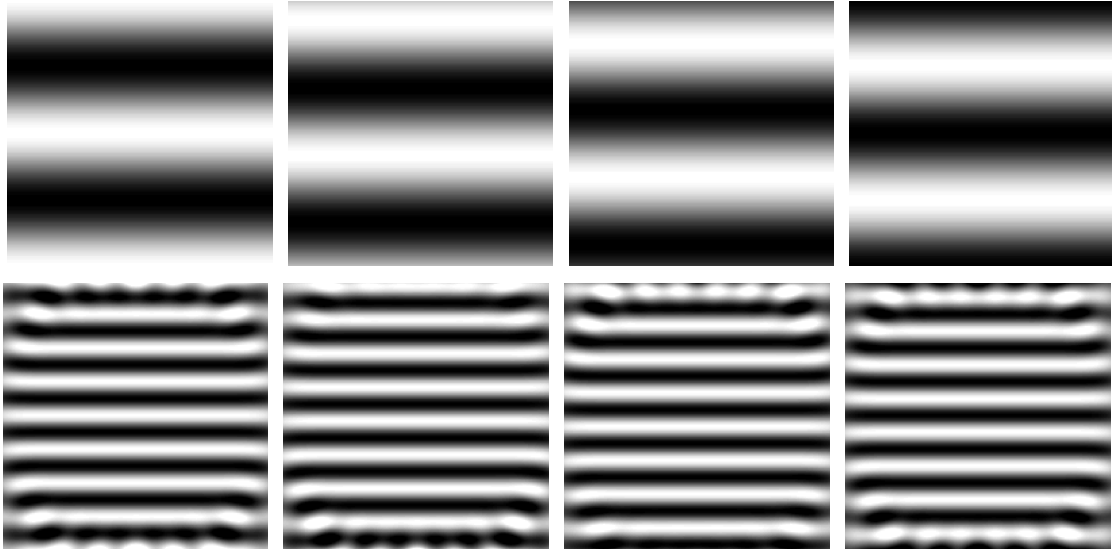


Abbildung 13: Plane wave from y axis $\varphi = \vartheta = \frac{\pi}{2}$ in horizontal cross section; time steps correspond to 0° , 60° , 120° , and 180° phase shifts ϕ in the plot $\Re\{p e^{i\phi}\}$ showing p from Eq. (5) with $c_{nm} = 0$ and b_{nm} of Eq. (114) with $b_{nm} = 4\pi i^n Y_n^m(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; long wave (top), short wave (bottom); simulation uses $N = 25$ and area shows $|kx|, |ky| < 2\pi$ and 8π .

$$\frac{(p_0 + p)(V_0 + \Delta V)^{1.4}}{p_0 V_0^{1.4}} = 1 \quad (115)$$

$$\dot{p} = -\rho_0 c^2 \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (116)$$

$$p = -\rho_0 c^2 \frac{[\xi(x + \Delta x) - \xi(x) - \Delta x] \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}. \quad (117)$$