

Messung mittels ebenem Mikrofonarray

Laborprotokoll, Akustische Messtechnik 2, LU

Katharina Egger
Marlon Meißnitzer

Betreuer: Dr. Franz Zotter

Graz, 16. Juni 2011



institut für elektronische musik und akustik



Zusammenfassung

Der erste Teil dieser Übung befasst sich mit der Bestimmung des Schallfelds eines Lautsprechers mit Hilfe eines ebenen Mikrofonarrays. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Ermittlung der Schallschnelleverteilung auf einer Metallplatte und der grafischen Darstellung der Moden.

Inhaltsverzeichnis

1	Messung einer Punktschallquelle mit ebenem Mikrofonarray	4
1.1	Aufgabenstellung	4
1.2	Messaufbau	4
1.3	Kalibrierung	5
1.4	Berechnung des Wellenzahlspektrums	6
1.5	Verarbeitung / Berechnung	7
1.6	Auswertung	7
2	Moden einer Platte	10
2.1	Messung der Schallausbreitungsgeschwindigkeit entlang der Platte	10
2.2	Messung der Moden einer Platte	17
2.2.1	Messung der Schwingungsmoden	17
2.2.2	Messergebnisse	17
2.2.3	Berechnung der Moden	25

1 Messung einer Punktschallquelle mit ebenem Mikrofonarray

1.1 Aufgabenstellung

In dieser Übung soll mit Hilfe eines ebenen Mikrofonarrays das Schallfeld eines tropfenförmigen Lautsprechers bestimmt werden. Dazu wurde mit dem Mikrofonarray eine logarithmische Sweepmessung des Lautsprechers aus verschiedenen Winkeln aufgezeichnet, um danach mittels Berechnung über das Wellenzahlspektrum das gesuchte Schallfeld beschreiben zu können.

1.2 Messaufbau

Zur Messung des Schallfelds stand uns ein ebenes Mikrofonarray bestehend aus 64 Mikrofonen zur Verfügung. Die Mikrofone waren dabei in einem 8x8 Raster angeordnet, wobei der Abstand zwischen 2 benachbarten Mikrofonen jeweils 7cm betrug. Als Schallquelle wurde der tropfenförmige Lautsprecher in einem Abstand von 1.5 Metern vor dem Mikrofonarray angeordnet. Zur Messung aus verschiedenen Winkeln wurde der Lautsprecher in 20 Grad Schritten mit dem konstanten Radius von 1.5 m entsprechend eines Viertelkreises vor dem Array bewegt.

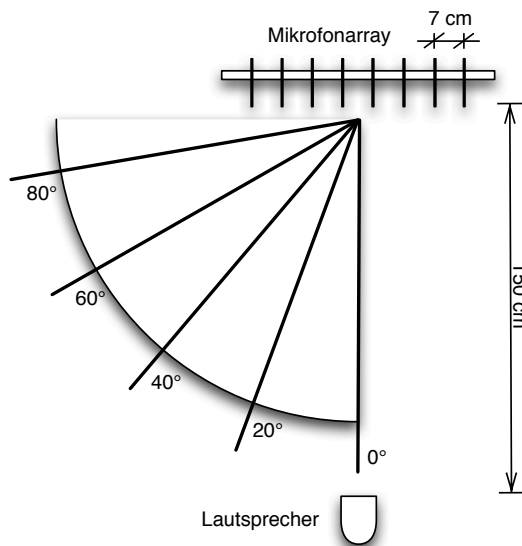


Abbildung 1: Skizze des Messaufbaus

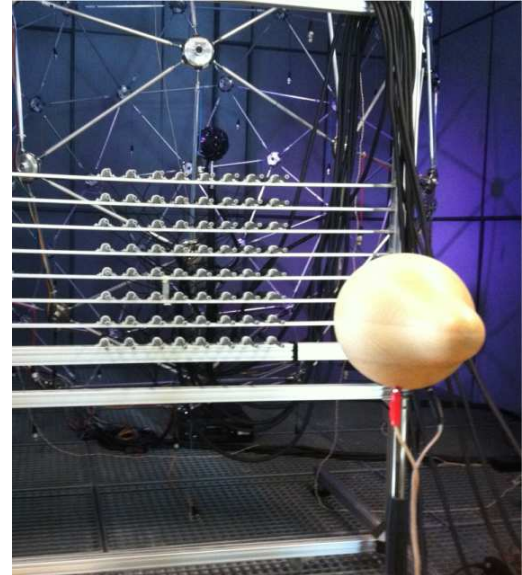


Abbildung 2: Messanordnung bei 0 Grad

Die aufgenommenen Signale wurden mittels 8 Audiointerfaces in den Rechner für die weitere Verarbeitung übertragen. Die Verarbeitung und weitere Auswertung erfolgte danach in PD bzw. Matlab.



Abbildung 3: Messaufbau

1.3 Kalibrierung

Um sicherzustellen, dass die Lautstärkeunterschiede der einzelnen Mikrofone nicht das Messergebnis verfälschen, wurde eine Frequenzgangentzerrung eines jeden einzelnen Mikrofons durchgeführt. Dazu wurde mit Hilfe eines Pistonphons an jedem Mikrofon ein Pegel von 94 dB SPL angelegt und gleichzeitig der mittels PD-Patch gemessene Schallpegel des Mikrofons in eine Korrektur- bzw. Kalibrierungsdatei geschrieben. Mit den ermittelten Korrekturwerten wurde dann in weiterer Folge eine Pegelkorrektur und somit Kalibrierung der einzelnen Mikrofone durchgeführt.

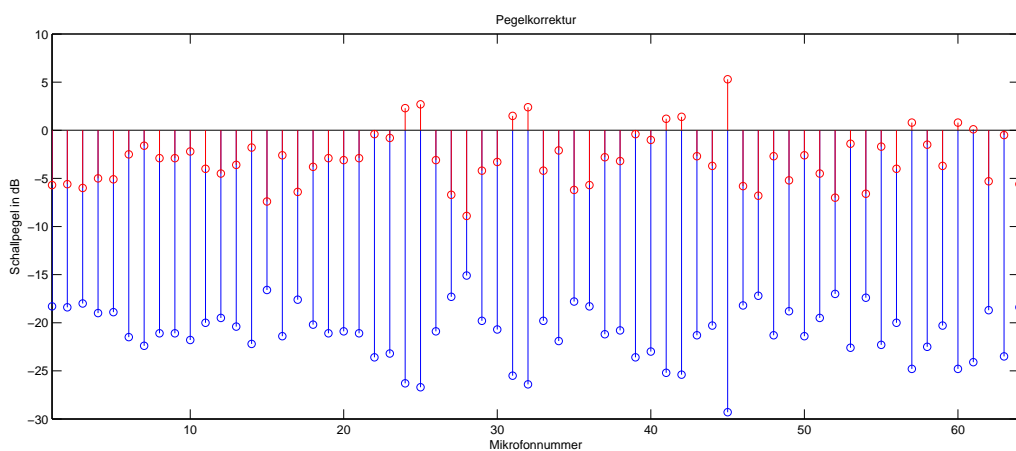


Abbildung 4: blau: in PD gemessene Pegelabweichung; rot: mit Matlab berechnete Korrekturwerte

1.4 Berechnung des Wellenzahlspektrums

Der Lösungsansatz für die Wellengleichung (1) des Schalldrucks kann als Produktansatz in kartesischen Koordinaten wie in (2) angeschrieben werden [Zot10].

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$p_h(x, y, z, t) = e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} = e^{i\mathbf{k}^t \mathbf{r} - i\omega t} \quad (2)$$

Um das Wellenspektrum später grafisch für bestimmte Ortsfrequenzen darstellen zu können, werden die Impulsantworten in den Ortsfrequenzbereich transformiert (3).

$$P(x, y, z, \omega)|_{z=0} = \sum_{n=0}^{N_{DFT}} p(x, y, z, t)|_{z=0, t=\frac{n}{f_s}} \cdot e^{-\frac{j\omega}{f_s} n} \quad (3)$$

Mittels 2D Fourier-Transformation erhalten wird das Wellenzahlspektrum für den Schalldruck (siehe [Zot10]).

$$\psi(k_x, k_y)|_{z=0} = \int \int_{\mathbb{R}^2} p(x, y)|_{z=0} e^{-ik_x x - ik_y y} dx dy = \mathcal{F}_{x,y} \{p(x, y)|_{z=0}\} \quad (4)$$

Das diskrete Wellenzahlspektrum ergibt sich demnach zu

$$\Psi[w_x, w_y, \omega] = \sum_{l_x, l_y} p(l_x, l_y, \omega) e^{i2\pi/L_x \Delta x l_x w_x + i2\pi/L_y \Delta y l_y w_y}, \quad (5)$$

wodurch sich folgende Beziehungen ergeben:

$$k_x[w_x] = \frac{2\pi}{L_x w_x}, \quad k_y[w_y] = \frac{2\pi}{L_y w_y} \quad (6)$$

Das Spektrum ist durch die Abtastung im Ort bezüglich w_x und w_y periodisch. Bei der Repräsentation von weit ausgelenkten Richtungen, in unserem Fall also bei Indizes w_x oder w_y größer 8, kommt es daher zu Aliasing.

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{k_y}{k_x} \right), \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k_z} \right) \quad (7)$$

Ist das Wellenzahlspektrum einer Ebene bekannt, kann der Feldverlauf mittels Verschiebungssatz der Fourier-Transformation berechnet werden (8,9).

Wie zum Beispiel in Kapitel 2.2 zeichnet das Mikrofonarray zunächst das einstrahlende Schallfeld $p(x, y, 0)$ entlang der Ebene $z = 0$ auf, um dann den Feldverlauf $p(x, y, a)$ in der Ebene der Metallplatte $z = a$ zu berechnen.

$$\psi(\mathbf{k})|_{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} = \psi(\mathbf{k})|_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}^t \Delta\mathbf{r}} \quad (8)$$

$$p_z(k_x, k_y, a) = \psi(k_x, k_y)|_{z=0} e^{-ia\sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}} \quad (9)$$

1.5 Verarbeitung / Berechnung

Zur Bestimmung der Frequenzgänge kam als Anregungssignal ein logarithmischer Sinussweep zum Einsatz. Vorteil des logarithmischen Sweeps liegt darin, dass durch Fensterung der Impulsantwort nichtlineare harmonische Verzerrungen eliminiert werden können. Der Sweep wurde in PD generiert und die gemessenen Signale wurden direkt in jeweils eine Datei geschrieben.

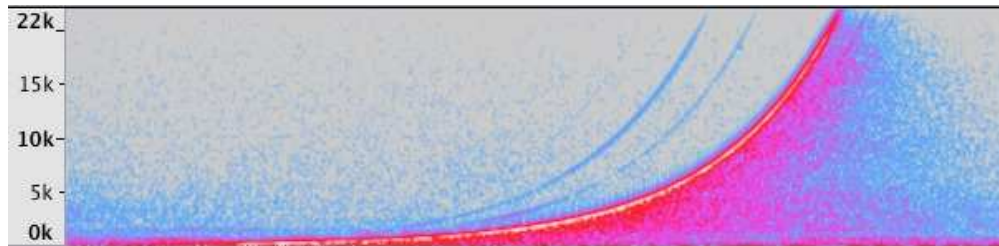


Abbildung 5: Aufgenommener logarithmischer Sweep von Mikrofon 1, 0 Grad (Abszisse: Zeit, Ordinate: Frequenz)

Zur Messung wurde, wie bereits beschrieben, die Lautsprecherposition in 20 Grad-Schritten verändert. Die gemessenen Dateien wurden danach in Matlab zur weiteren Verarbeitung eingelesen. Hier wurden nun die aufgenommenen Signale, sowie auch das Anregungssignal mittels DFT in den Ortsfrequenzbereich transformiert um für jeden aufgenommenen Winkel die 64 Übertragungsfunktionen zu erhalten.

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} \quad (10)$$

$Y(w)$... DFT des gemessenen Mikrofonsignals

$X(w)$... DFT des Anregungssignal (logarithmischer Sweep)

Danach wurden die Übertragungsfunktionen in den Zeitbereich zurücktransformiert und gefenstert. Bei der Fensterung wurde dabei 10 Samples lang ein- und 30 Samples ausgeblendet. Danach wurde die Gewichtung mit den zuvor ermittelten (siehe 1.3) Kalibrierungswerten durchgeführt.

Nun wurde in Matlab das Wellenzahlspektrum (siehe auch 1.4) berechnet. Dazu wurden die Impulsantworten wieder in den Ortsfrequenzbereich transformiert wobei die Transformation in Matlab mit dem Befehl `fft2` realisiert wurde.

1.6 Auswertung

Zur Darstellung des Absolutbetrags des Wellenzahlspektrums wurde eine grafische Benutzeroberfläche programmiert, mit dessen Hilfe zwischen den verschiedenen Einstrahlwinkeln des Lautsprechers und der gewünschten Frequenz gewechselt werden kann. Wie Abbildung 7 zeigt, ist bei niedrigen Frequenzen die Genauigkeit der Richtungsabbildung geringer, da die Phasendifferenzen

zwischen den einzelnen Mikrofonen aufgrund der großen Wellenlänge abnehmen. Da die räumliche Auflösung durch die Mikrofonanordnung begrenzt ist, treten ab der Grenzfrequenz (8) Spiegelfrequenzen auf.

Zusätzlich zur Begrenzung der Auflösung tiefer Frequenzen durch die endliche Abmessung der Mikrofonanordnung, stellt die endliche Anzahl der Mikrofone mit endlichem Abstand zueinander eine nicht ausreichend feine, räumliche Diskretisierung der Ebene dar. Deshalb kommt es durch die diskrete Abtastung bei höheren Frequenzen zu räumlichen Aliasing und es treten störende Interferenzmuster auf.

$$f_g = \frac{c}{2\Delta x} = \frac{343 \frac{m}{s}}{2 \cdot 0.7m} = 2450Hz \quad (11)$$

Wie Abbildung 6 zeigt, ist über der Grenzfrequenz ohne zusätzliches Wissen keine eindeutige Richtungszuordnung mehr möglich (Mehrdeutigkeit). Liegt der betrachtete Ortsfrequenzbereich aber unterhalb der gegebenen Grenzfrequenz, lässt sich die Einfallsrichtung eindeutig erkennen.

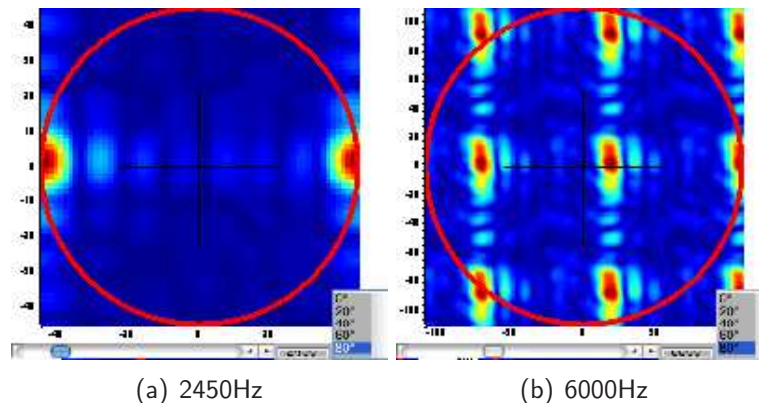


Abbildung 6: Auswirkung von Spiegelfrequenzen (hier bei einem Einstrahlwinkel von 80 Grad)

Weiters zeigen die Plots in Abbildung 7, dass der Lautsprecher im Messaufbau nicht ganz mittig vor dem Mikrofonarray platziert wurde, sondern leicht nach oben als auch seitlich verschoben ist.

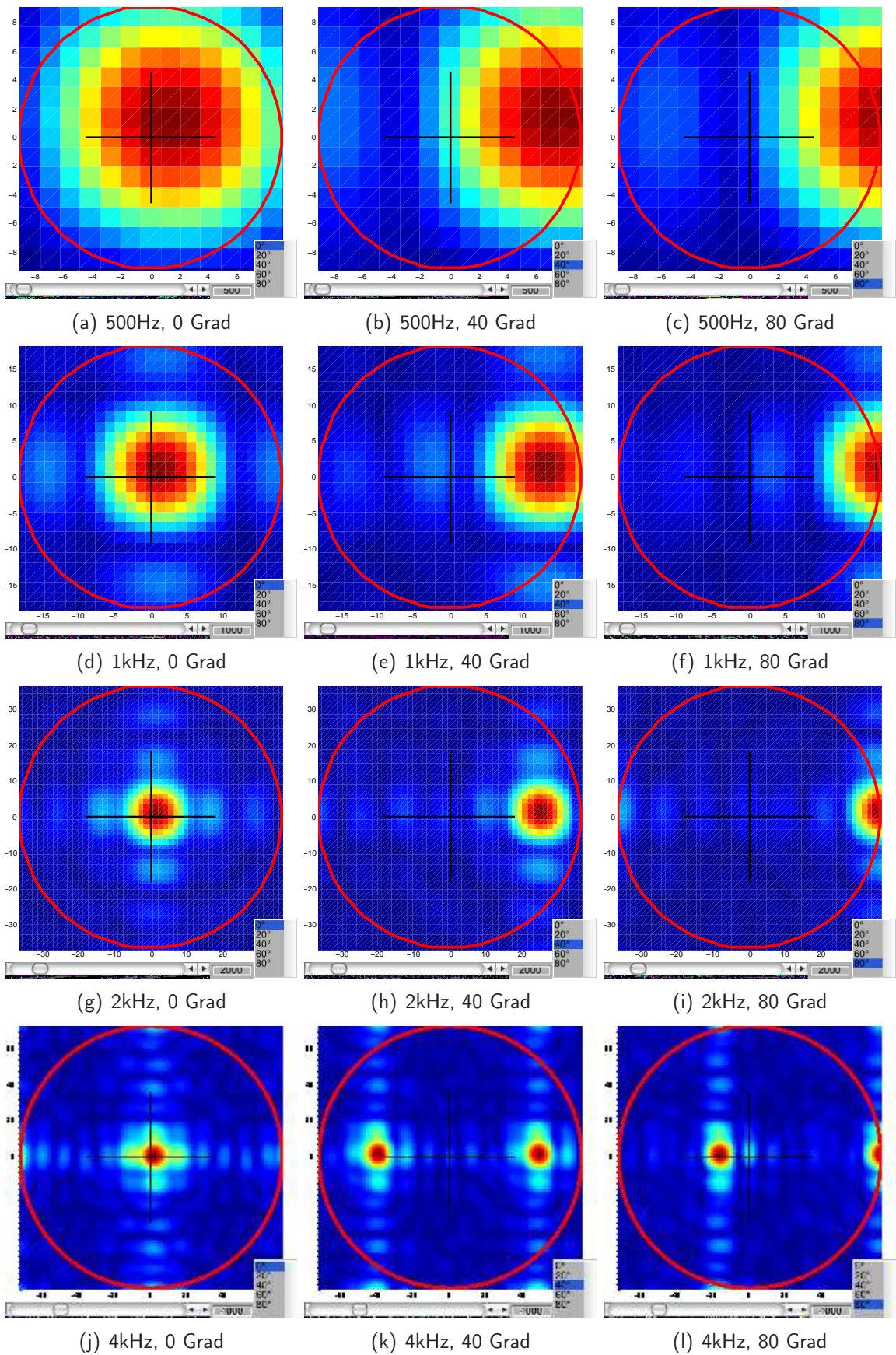


Abbildung 7: Vergleich der Ergebnisse bei verschiedenen Frequenzen und Einstrahlwinkeln

2 Moden einer Platte

Die Aufgabe bestand darin, die Schallschnelleverteilung auf einer Metallplatte zu messen. Dadurch sollen die einzelnen Moden, die sich auf der Platte ausbilden, grafisch dargestellt werden. Es wurde eine Metallplatte mit einer Fläche von ca. $1m^2$ (Höhe x Breite $0.97m \times 1m$) verwendet, welche an der oberen Kante entlang eingespannt bzw. aufgehängt wurde. Der Abstand zwischen Platte und Mikrofonarrayebene betrug konstant $z = 9cm$. Abbildungen 8 und 9 zeigen den Messaufbau.



Abbildung 8: Messaufbau - Seitenansicht



Abbildung 9: Messaufbau - Frontansicht b

2.1 Messung der Schallausbreitungsgeschwindigkeit entlang der Platte

Um die Moden später auch händisch berechnen zu können, sollte die genaue Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls C entlang der Platte berechnet werden. Dazu wurde die Metallplatte an einer Seite impulsförmig angeregt (zum Beispiel Mittels einer Schraube) und die Impulsantworten entlang der Platte gemessen.

Die erste Messung wurde mit dem auch schon zuvor verwendeten ebenen Mikrofonarray durchgeführt.

Die Platte wurde Mittels Impuls an einer Seite (in unserem Fall links) angeregt, um so Signale mit maximal möglicher Zeitverschiebung (Mikrofon am Anregungspunkt und Mikrofon am anderen

Ende der Platte) aufzeichnen zu können.

Bei der Analyse der gewonnenen Impulsantworten, wurde sehr schnell deutlich, dass diese Messung verworfen werden kann.

Abbildung 10 zeigt den Amplitudenverlauf über der Zeit von 8 horizontal nebeneinander positionierten Mikrofonen. Eigentlich würden wir 2 Wege bzw. 2 Geraden im Bild erwarten, welche der Schallausbreitung in Luft und im Metall entsprechen. Betrachtet man jeweils den Beginn der Impulsantwort eines jeden Mikrofonsignals (rot/gelb), kann man dies als abfallende Gerade deuten.

Wir erwarten eine Körperschallgeschwindigkeit, die geringer ist als jene in Luft, da es sich bei der Platte um weiches, nicht steifes Metall handelt. Hier kann jedoch nicht zwischen Luft- und Körperschall unterschieden werden.

Gesucht wird die Schallgeschwindigkeit entlang der Platte. Die Mikrofone zeichnen jedoch auch die Schallanteile, die über den Luftweg übertragen werden, auf. Die Intensität dieser ist viel höher, wodurch Luft- und Körperschallanteile nicht mehr gut getrennt werden können. Die Schallgeschwindigkeit würde in diesem Fall zu hoch berechnet werden.

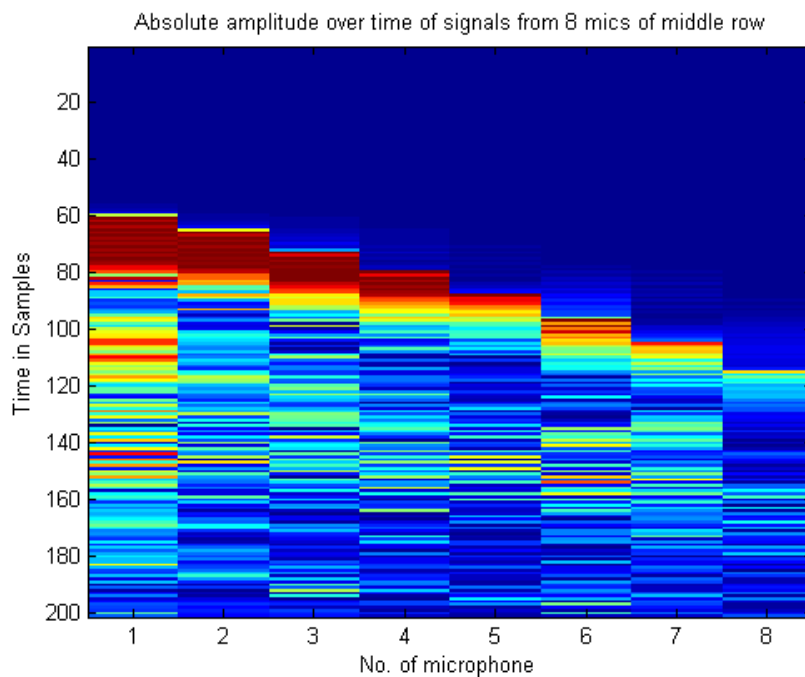


Abbildung 10: Amplitudenzeitverlauf der 8 Mikrofon-signale der mittleren Mikrofonreihe

Abbildung 11 zeigt die 8 Impulsantworten der mittleren Mikrofonreihe.

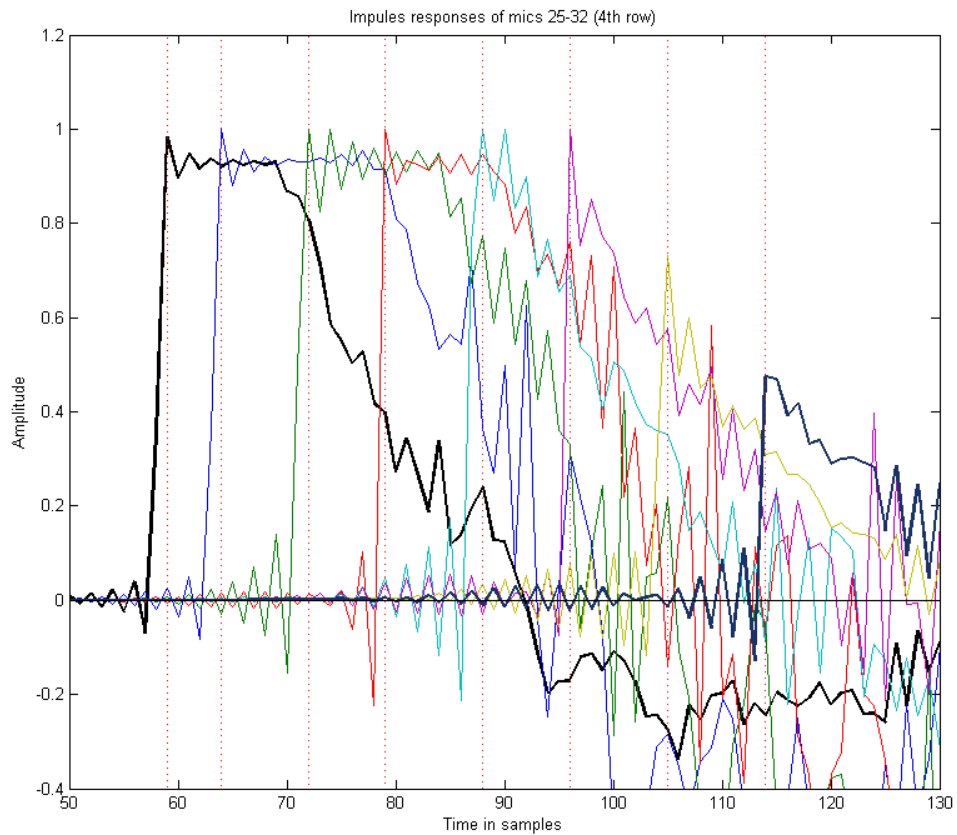


Abbildung 11: Messung der Impulsantworten mittels Mikrofonarray

Um ein repräsentatives Ergebnis zu erhalten, wurde die Impulsantwortmessung daher mittels Beschleunigungsaufnehmern durchgeführt, welche direkt auf die Metallplatte geklebt wurden. Es wurden 3 Messensoren verwendet und vertikal auf mittlerer Höhe sowie horizontal rechts, links und mittig angeordnet, wie in Abbildung 12 ersichtlich. Es wurden 3 Beschleunigungsaufnehmer inklusive Vorverstärker eines Brüel & Kjaer Messsystems verwendet.

Die Platte wurde wieder Mittels Schraube impulshaft an der linken äußeren Seite angeregt.

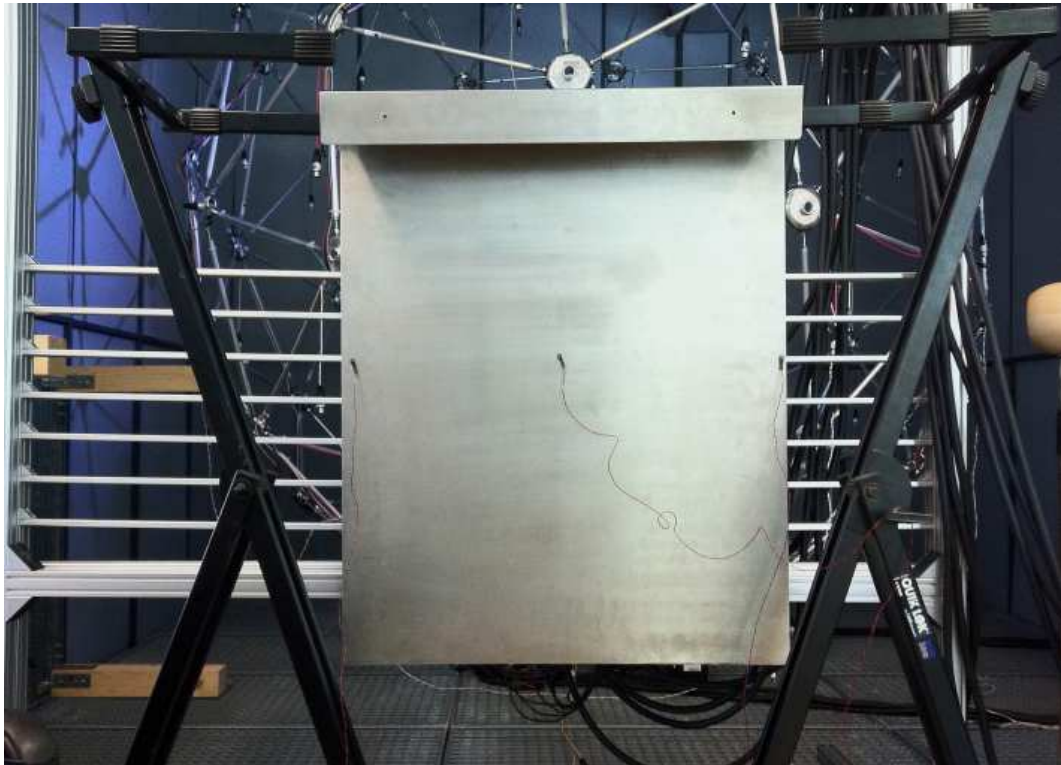


Abbildung 12: Messung der Impulsantworten Mittels aufgeklebter Beschleunigungssensoren

Abbildung 13 zeigt zunächst die Spektren der 3 aufgenommenen Signale. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Schallgeschwindigkeit über der Frequenz variiert. Je höher die Frequenz, desto höher C . Möchte man anschließend also eine noch genauere Berechnung der Moden durchführen, sollte man je nach Frequenzbereich verschiedene Werte für C verwenden.

Vorerst reicht jedoch für unsere Zwecke die Berechnung einer mittleren Schallgeschwindigkeit C aus.

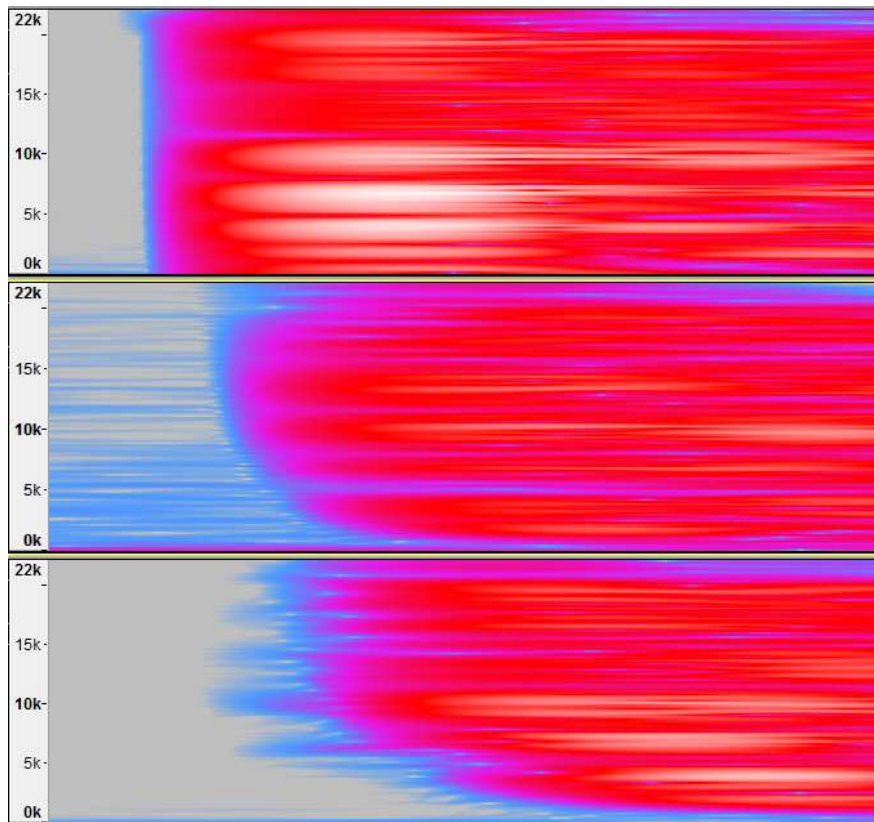


Abbildung 13: Dispersion der Schallgeschwindigkeit

Dazu werden die 3 Sensorsignale zunächst Tiefpass gefiltert ($f_{cut} = 800Hz$), um etwaige niederfrequente Störungen zu eliminieren. Weiters werden die mit einer Abtastfrequenz von $f_s = 44100Hz$ aufgenommenen Signale 6-fach downgesamplert.

Abbildung 14 zeigt die aufgenommenen Impulsantworten entlang der Platte, welche zur Messung in unserer Laborgruppe verwendet wurde. In diesen Diagrammen wurden händisch die Startzeitpunkte der einzelnen Impulsantworten ausgelesen, wie die 3 senkrechten Cursor in dem Bild zeigen.

Aufgrund der resultierenden Zeitunterschiede Δt und der einzelnen Abstände m der Sensoren zueinander wurde die Körperschallgeschwindigkeit $C = \frac{\Delta t}{m}$ entlang der Platte berechnet. Die Werte können aus Tabelle 1 entnommen werden.

Sensor Nr.	Zeitpunkt t in Samples	Zeitunterschied Δt in Samples	Position/Abstand m in cm	Schallgeschw. C in $\frac{m}{s}$
1 (links)	33.2	-	0	-
2 (Mitte)	54.4	21.2	46	159.5
3 (rechts)	74.1	40.9	95	170.7

Tabelle 1: Berechnung der Schallgeschwindigkeit C - Gruppe 2

Die mittlere Schallgeschwindigkeit entlang der Platte ergibt sich daher als Mittelwert der beiden Einzelwerte und beträgt $C = 165.1 \frac{m}{s}$

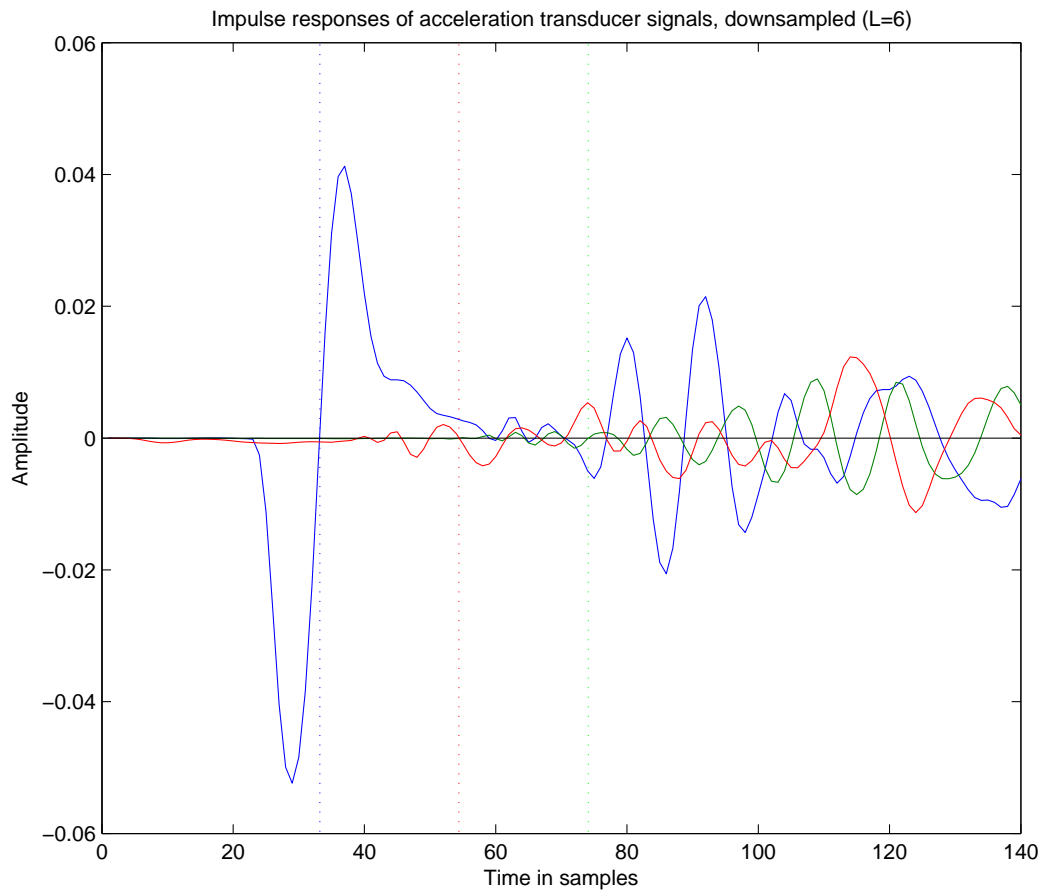


Abbildung 14: Impulsantworten der Beschleunigungsaufnehmer auf Metallplatte - Gruppe 2

Die erste Laborgruppe hatte eine andere Metallplatte verwendet, auf der die Schallschnelle gemessen wurde. Um auch mit deren Messungen, die Moden händisch nachberechnen zu können, wurden zusätzlich auch für diese Platte die Impulsantworten gemessen um die Schallgeschwindigkeit zu berechnen.

Aus ungeklärter Ursache war hier dem Messsignal des dritten Sensors ein Gleichanteil überlagert, welcher als Offset im ungefilterten Signal erkennbar war. Um diesen zu entfernen, wurde zunächst der Mittelwert so gut es ging vom Signal abgezogen, um den Wechselanteil des Signals zu erhalten. Um einen fälschlichen Impuls auf Grund des Offsets des Gleichanteils am Anfang des Signals zu unterdrücken, wurde das Zeitsignal zusätzlich mit einem Hann-Fenster gefiltert. Um den Offset noch mehr zu unterdrücken, wurde das Signal weiters zwischen 120Hz und 1600Hz Bandpass gefiltert. In Abbildung 15 sind analog zu vorhin die aufgenommenen Impulsantworten entlang der Platte der anderen Gruppe abgebildet.

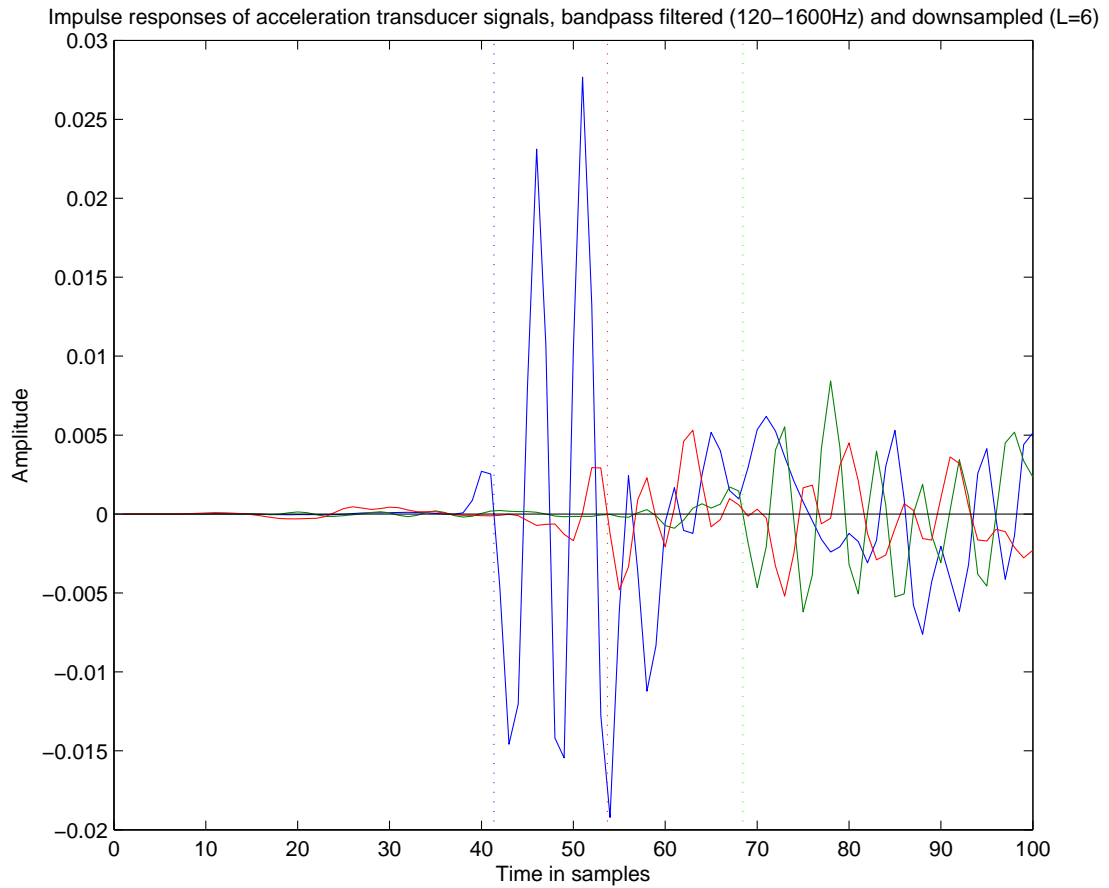


Abbildung 15: Impulsantworten der Beschleunigungsaufnehmer auf Metallplatte - Gruppe 1

Die Berechnung der Schallgeschwindigkeit erfolgte analog zu vorhin (siehe Tabelle 2). Es ergab sich eine etwas höhere mittlere Schallgeschwindigkeit von $C = 173.6 \frac{m}{s}$

Sensor Nr.	Zeitpunkt t in Samples	Zeitunterschied Δt in Samples	Position/Abstand m in cm	Schallgeschw. C in $\frac{m}{s}$
1 (links)	41.35	-	0	-
2 (Mitte)	53.7	12.35	30	178.5
3 (rechts)	68.45	27.1	62.2	168.7

Tabelle 2: Berechnung der Schallgeschwindigkeit C - Gruppe 1

2.2 Messung der Moden einer Platte

2.2.1 Messung der Schwingungsmoden

Schon wie im vorigen Kapitel, greifen wir zur Berechnung der Schallschnelleverteilung auf der Oberfläche der Metallplatte auf das Wellenzahlspektrum und den Fourier- Verschiebungssatz zurück.

Das Mikrofonarray zeichnet das einstrahlende Schallfeld $p(x, y, 0)$ entlang der Ebene $z = 0$ auf.

Um die Schwingungsmoden aufzunehmen, benötigen wir eine Schallfeldrepräsentation des eingeschwingenen Zustands der Platte. Man denkt zunächst daran, die Platte mit weichem Anschlag (z.B. Hammer mit Schaumstoff) anzuregen. Da die Platte aber aufgrund der Reibung in Luft und der Aufhängung sehr schnell ausschwingt, würde ein weicher Anschlag zu wenig Energie übertragen (kein starker Impuls). Darum wird die Platte wieder impulsartig (diesmal mittig) angeregt. Dazu wird sie mit Hilfe einer Schraube (oder einem anderen festen Gegenstand) impulsartig angeschlagen.

Wir fenstern die aufgezeichneten Mikrofonsignale mit einem $1s$ Hannfenster. Einerseits um etwaige störende Reflexionen zu eliminieren bzw. zu dämpfen, da uns kein idealer Messraum zur Verfügung stand, andererseits um einen repräsentativen Zeitausschnitt der eingeschwingenen Signale zu verwenden. Das Fenster beginnt somit nach dem Impuls und endet bevor die Energie zu sehr abklingt. Das Fenster wirkt weiters wie ein Fade-In und verhindert somit ein zu hartes Einschalten.

2.2.2 Messergebnisse

Mit Hilfe von Matlab wurde der interpolierte, logarithmierte Betrag des Wellenzahlspektrums der Schnelle mit farbkodiertem Phasenverlauf dargestellt. Das Wellenzahlspektrum wird jeweils für die einzelne Frequenz dargestellt, welche darunter im quadrierten Summenspektrum aller Mikrofonsignale mit Hilfe des Cursors ausgewählt werden kann.

Anmerkung:

Die nachfolgenden Plots wurden mit Hilfe der Messdaten der anderen Laborgruppe erstellt. Mit deren Daten konnten die verschiedenen Modenformen besser veranschaulicht werden.

Die Laborgruppe 1 verwendete die Metallplatte, welche in Abbildung 12 zu sehen ist. Sie wurde im Abstand von $z = 11cm$ zum Mikrofonarray positioniert und hatte die Abmessungen Höhe x Breite von $0.79m \times 0.65m$.

Beim Rückrechnen der Messdaten auf die Schallschnelle kann zwischen mehreren Fällen gewählt werden.

- a) Die einfachste Methode ist es, einfach den Schalldruck anstatt der Schallschnelle darzustellen. Dies ist im Grunde genommen gar kein Rückrechnen, und sollte nur einen groben Überblick verschaffen. Überraschenderweise erhält man schon durch ledigliches Plotten des Schalldrucks

recht passable Ergebnisse, wie in den folgenden Abbildungen in den Tabellen 3 und 4 unter a) zu sehen ist.

Um die Schallschnelle realitätsgetreu darzustellen, bedarf es zunächst einer Erweiterung der bisher betrachteten Wellengleichung.

Bisher sind wir von einem homogenen Schallfeld ausgegangen, welches sich mit Gleichung (12) beschreiben lässt.

$$(\Delta + k^2)p = 0 \quad (12)$$

Im Allgemeinen haben wir es jedoch mit einem nicht-homogenen Feld zu tun, welches mit Hilfe der Green'schen Matrix beschrieben werden kann (13).

$$(\Delta + k^2)G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (13)$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes und weiteren Umformungen kann für unsere Situation (Schallquelle in einem unendlichen Halbraum - Schalldruck in anderem Halbraum gesucht) folgender Zusammenhang aufgestellt werden:

$$p = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial z} G \cdot p - \frac{\partial}{\partial z} p \cdot G \right) dx dy \quad (14)$$

Mit der bekannten Beziehung (15) zwischen Schalldruck p und Schallschnelle ν ergibt sich daher Gleichung (16).

$$\frac{\partial}{\partial z} p = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \nu_z = -i\omega\rho \nu_z \quad (15)$$

$$p|_{z=a} = -i2\omega\rho \nu_z|_{z=0} * G(0, a) \quad (16)$$

In unserem Fall stehen uns für $8 \times 8 = 64$ Mikrofone Schalldrücke p in der Ebene $z = a = 11\text{cm}$ zur Verfügung, welche wir auf die Schallschnelle ν in der Ebene $z = 0$ rückrechnen wollen. Fassen wir die einzelnen Mikrofonsignale zu einem Vektor zusammen, können die Gleichungen in Vektor-/Matrixschreibweise angegeben werden. Zieht man den konstanten Faktor noch in die Matrix \mathbf{G} hinein, ergibt das:

$$\vec{p}|_{z=a} = \mathbf{G} \cdot \vec{\nu}|_{z=0} \quad (17)$$

$$\vec{\nu}|_{z=0} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \vec{p}|_{z=a} \quad (18)$$

Um die Schallquelle in einem Halbraum darzustellen, verwenden wir eine Punktquelle. Diese wird in alle Punkte auf die ebene Fläche $z = 0$ gesetzt und der jeweilige Anteil des Drucks bzw. Schnelle bei $z = a$ berechnet. Diese Information wird von der Matrix \mathbf{G} repräsentiert (näheres dazu in den nächsten beiden Unterpunkten b) und c).

- b) Hier geht man von einer Punktquelle in einem einzigen Punkt aus, in der Matrix \mathbf{R} werden die Abstände von jedem Messpunkt zu dieser einzigen Quelle eingetragen. Die Matrix \mathbf{G} wird dann wie folgt im Sourcecode ersichtlich berechnet:

```

1 % X,Y,Z repräsentieren die Mikrofonpositionen
2 [Y,X] = meshgrid(-3.5:3.5, -3.5:3.5);
3 X = X*a;
4 Y = Y*a;
5 Z = ones(8,8)*a;
6
7 R = sqrt((X+.035).^2+(Y+.035).^2+Z.^2);
8 G = exp(-1i*k*R)./R;
9 G = fft2(reshape(G,8,8));
10 Gabs = abs(G);
11 Gabs = max(Gabs,max(Gabs(:))*0.3); % Dynamikbegrenzung
12 G = Gabs.*exp(1i*angle(G));
13 V = 1i/(omega*rho0*2)*ifft2(fft2(reshape(P,8,8))./G); % Entfaltung im Frequenzbereich
14 V = V(:);

```

Im Gegensatz zu *c*) wird die Entfaltung im Ortsfrequenzbereich (mittels Division, siehe Source Code) durchgeführt. Vor der Entfaltung wird die Dynamik des Absolutbetrags von G auf $10dB$ begrenzt, damit das Rauschen nicht zu sehr verstärkt wird.

- c) In den 64 Messpunkten, gegeben durch die Dimensionen des Mikrofonarrays, wird der Betrag der Schallschnelle gesucht. In diesem Fall werden in der Matrix R die Abstände zwischen all diesen Positionen gespeichert, wie wenn man die Punktquelle in alle Punkte setzt und deren Einfluss bestimmt.

```

1 % X,Y,Z repräsentieren die Mikrofonpositionen
2 [Y,X] = meshgrid(-3.5:3.5, -3.5:3.5);
3 X = X*a;
4 Y = Y*a;
5 Z = ones(8,8)*a;
6
7 R = zeros(64,64);
8 for i=1:64
9     R(:,i) = sqrt((X-X(i)).^2+(Y-Y(i)).^2+Z.^2);
10 end
11 G = exp(-1i*k*R)./R;
12 cond(G) % Anzeige der Konditionszahl
13
14 % Regularisierung und Entfaltung diskret im Ortsbereich
15 V=1i/(omega*rho0*2*0.07^2)*inv(G + 1*eye(size(G)))*P(:);

```

G ist in unserem Fall quadratisch und ließe sich daher ohne weitere Umformungen invertieren. Die Matrix ist jedoch sehr sehr schlecht konditioniert (Konditionszahlen zwischen 200 und 250!), deshalb ist eine Regularisierung sehr zu empfehlen.

Wir entschieden uns für folgende Variante:

$$G^{-1} \approx (G + \alpha \cdot I)^{-1} \quad (19)$$

Es wurde $\alpha = 1$ gewählt, da dies die besten Ergebnisse erzielte.

Um das Ergebnis noch weiter zu verbessern, sollte vielleicht an eine Singulärwertzerlegung gedacht werden. Dies wurde aus Zeitgründen nicht mehr realisiert.

Tabelle 3 zeigt exemplarisch Wellenspektren für verschiedene Frequenzen / Moden. Ein direkter Vergleich aller 3 Methoden bei ein und der selben Mode zeigen Tabellen 4 und 4.

Besonders im direkten Vergleich zeigt sich, dass die einfachste Variante recht gute, und zum Teil sogar die besten Ergebnisse erzielt. Jedoch zeigt sich auch, dass für kompliziertere Modenmuster

eine Rückrechnung auf die Schallschnelle notwendig ist, da diese allein mit dem Schalldruck nicht richtig dargestellt werden (siehe zum Beispiel Tabelle 4).

Bei der betrachteten Schwingungsmodenfrequenz kann sich eine Phasenverschiebung Φ ergeben. Diese ist auf die zeitliche Verschiebung der Signale zwischen Abstrahlung an der Platte und Aufnahme am Mikrofon zurückzuführen. Auch die Fensterung der Signale kann zusätzlichen Einfluss auf deren Phase nehmen. Schalldruck und Schallschnelle besitzen die selbe Phasenverschiebung.

Wären die komplexen Schallschnellewerte in Nullphase, wären die Werte alle entlang der reellen Achse der komplexen Ebene zu finden. Ein etwaiges Φ kann jedoch sehr einfach berechnet werden. Quadriert man alle Werte, bilden sich diese nur mehr im 1. Quadranten ab (positiver Real- und Imaginärteil, siehe Abbildung 16 in rot). Summiert man diese Werte auf und bildet den Arcustangens, erhält man den doppelten Phasenwinkel, woraufhin man Φ Mittels Division durch 2 erhält.

Ist Φ einmal bekannt, lässt sich die Phasenverschiebung einfach mit $-\Phi$ kompensieren.

Die so ermittelten Schallschnellewerte mit kompensierter Phase, also mit $-\Phi$ beaufschlagt, werden in einem Extra-Fenster im Programm angezeigt. Es wird die Schallschnelle in der Form $\nu \cdot e^{-\Phi}$ in der komplexen Ebene, wie in Abbildung 17 rechts zu sehen, dargestellt.

In Abbildung 17 sieht man beispielhaft eine Mode, bei der die Phase erfolgreich kompensiert wurde. Die Schnellewerte liegen alle entlang der reellen Achse, die Imaginärteile sind generell deutlich kleiner als die Realteile.

Die Kompensation funktioniert jedoch nicht immer bei allen Moden richtig. Dies lässt sich eventuell auf nicht eingeschwungene Modenzustände und Messungenauigkeiten zurückführen.

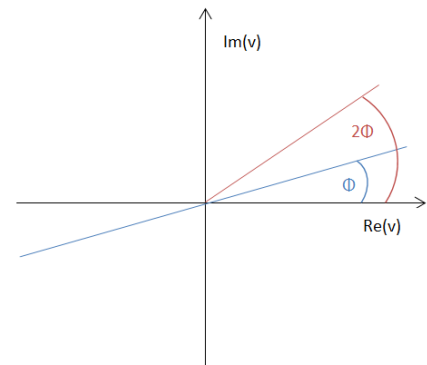


Abbildung 16: Schematische Darstellung der phasenverschobenen Schallschnelle (blau) und der quadrierten Schallschnelle (rot) in der komplexen Ebene

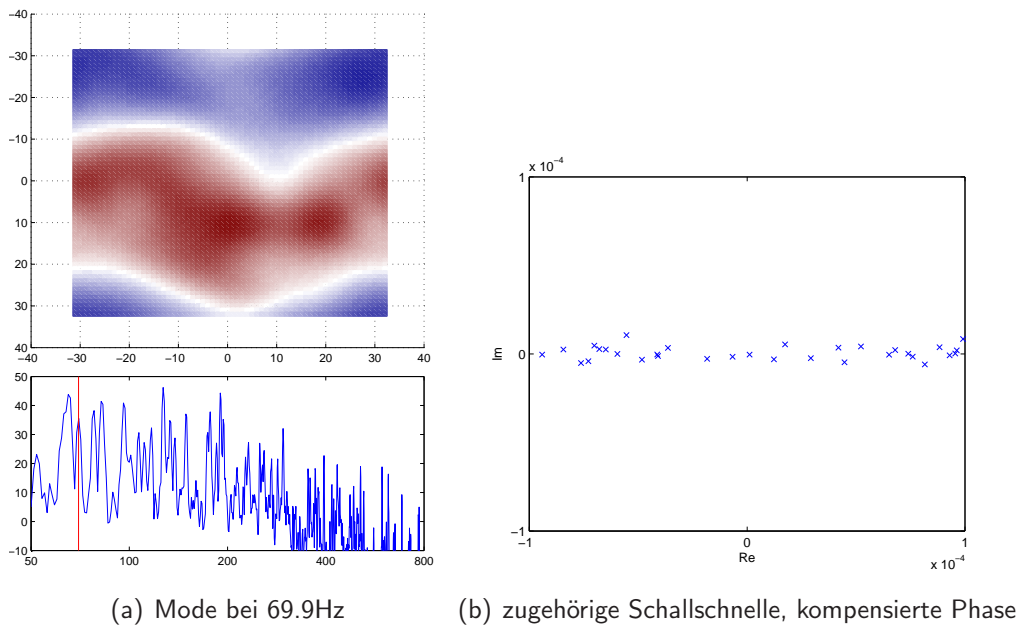


Abbildung 17: Darstellung der Schwingungsmode und zugehörigen Schallschnellewerten mit kompensierter Phase in der komplexen Ebene

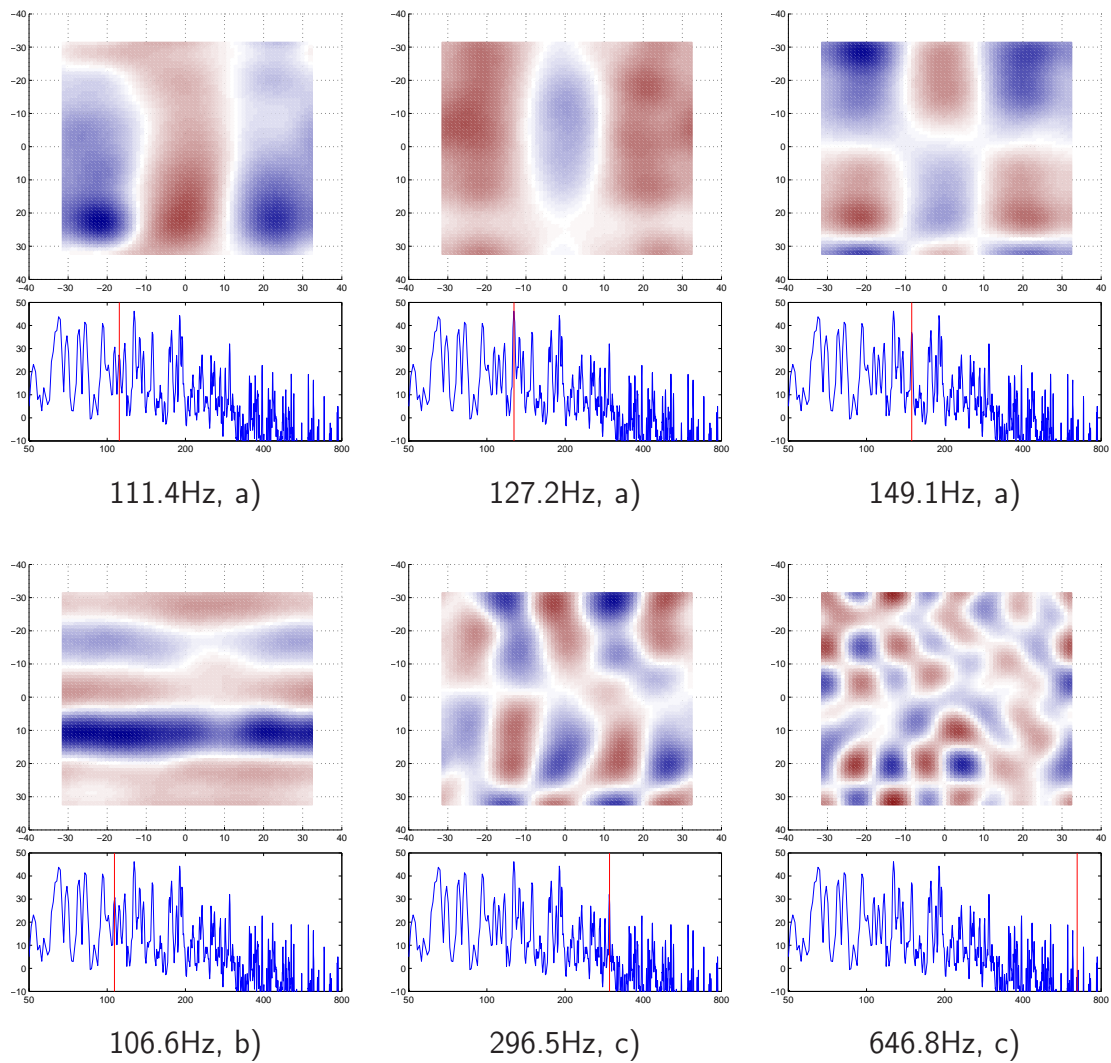


Tabelle 3: Schallschnelleverlauf auf der Platte 1: a) Schalldruck b) Entfaltung im Ortsfrequenzbereich c) Regularisierung, diskrete Entfaltung

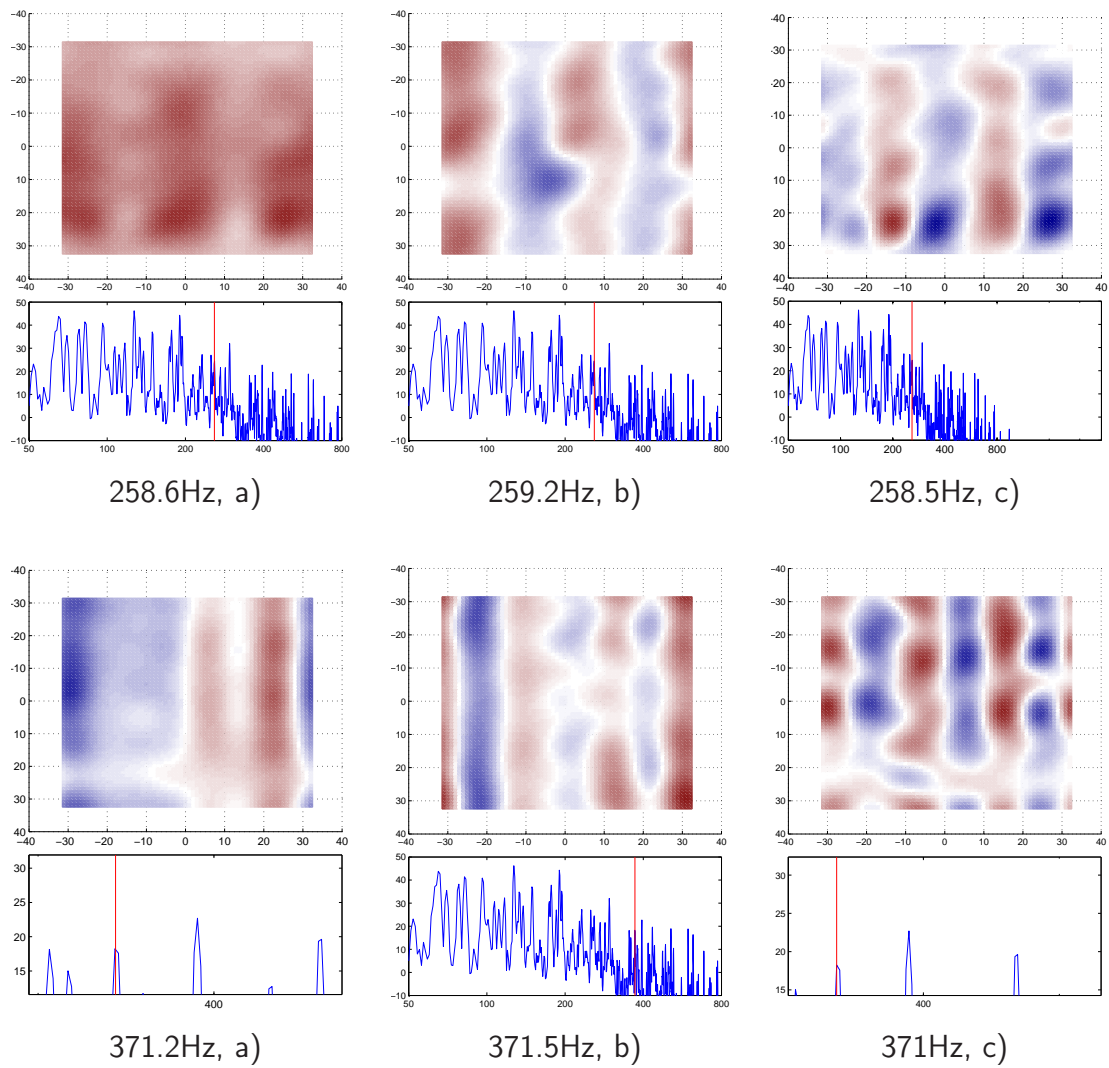


Tabelle 4: Schallschnelleverlauf auf der Platte 1: a) Schalldruck b) Entfaltung im Ortsfrequenzbereich c) Regularisierung, diskrete Entfaltung

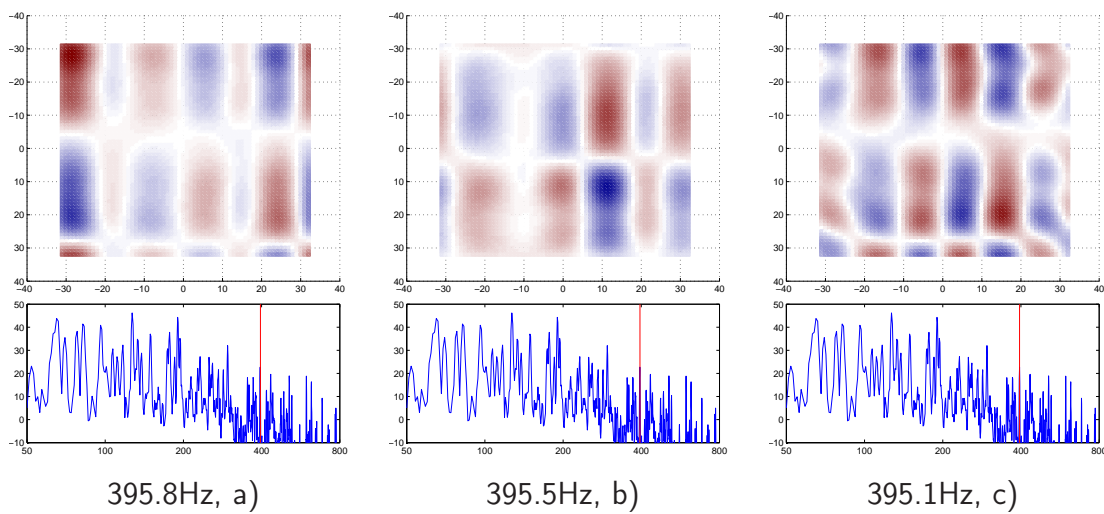
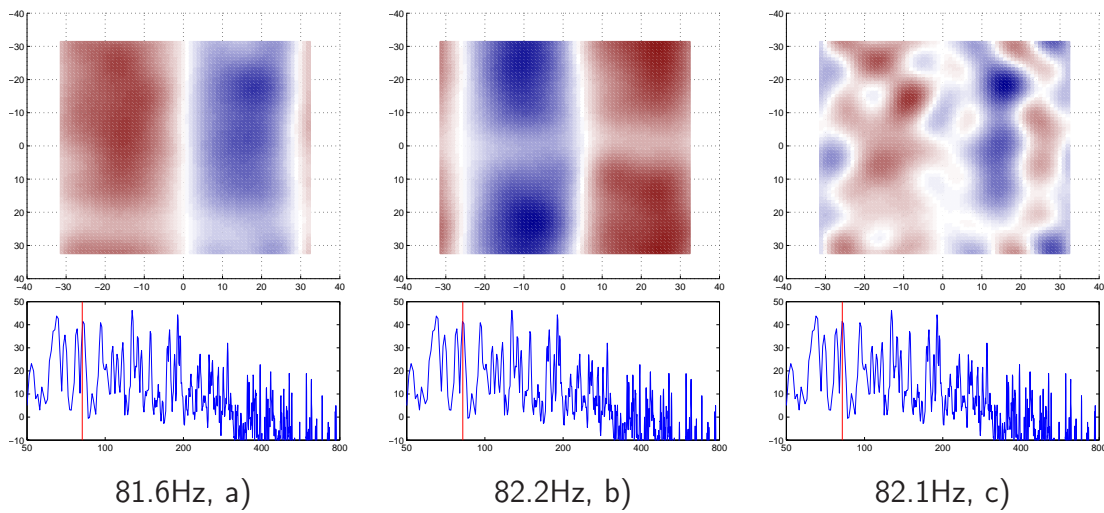
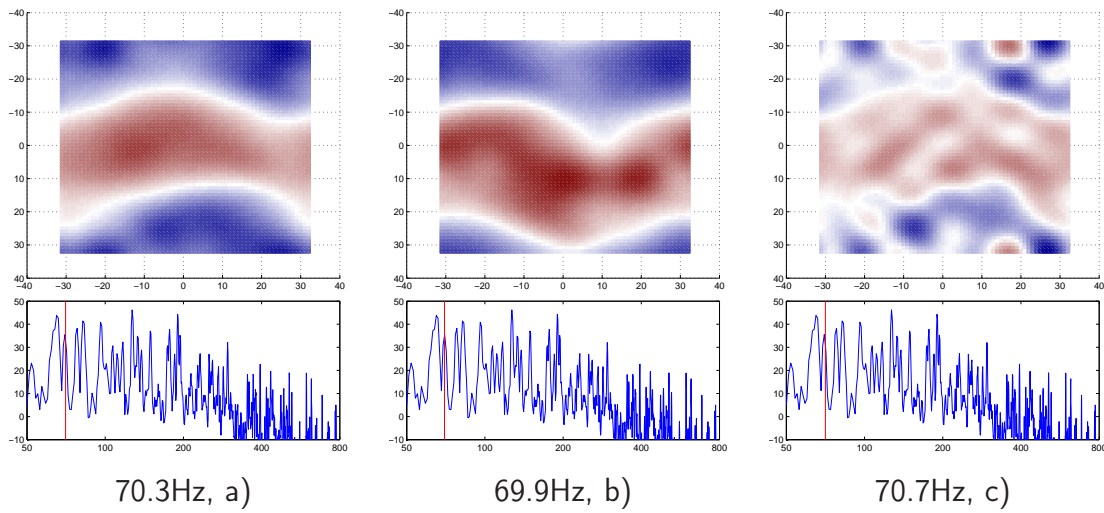


Tabelle 5: Schallschnelleverlauf auf der Platte 2: a) Schalldruck b) Entfaltung im Ortsfrequenzbereich c) Regularisierung, diskrete Entfaltung

2.2.3 Berechnung der Moden

Schreibt man die 2 dimensionale Wellengleichung für eine ideale Platte mit den Abmessungen $L \times M$ an (20), kann man auf die Frequenzen der auftretenden Moden (27) schließen.

$$(\Delta + k^2)\nu_z = 0 \quad (20)$$

Wählt man für die Schnelle ν_z einen exponentiellen Ansatz (21), erhält man die charakteristische Gleichung (22).

$$\nu_z = e^{-ik_x x} \cdot e^{-ik_y y} \quad (21)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 = \left(\frac{\omega}{c_{\text{Platte}}} \right)^2 \quad (22)$$

Die Annahme einer eingespannten Platte, ergibt die Forderung $\nu_z = 0$ für $x = 0$ und M , $y = 0$ und L . Daraus folgt für k_x

$$\nu_z = a(k_x) \cdot \cos(k_x \cdot x) + b(k_x) \cdot \sin(k_x \cdot x) = 0 \quad (23)$$

$$b(k_x) \cdot \sin(k_x \cdot x) = 0 \quad (24)$$

$$k_x = \frac{\pi}{M} \cdot m \quad (25)$$

und analog für k_y

$$k_y = \frac{\pi}{L} \cdot l \quad (26)$$

Durch Rückeinsätzen erhält man schließlich:

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{l}{L}\right)^2} \quad (27)$$

Da unsere Platte nur an der Oberkante eingespannt ist, muss der Term für k_y wie folgt erweitert werden.

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{l+0.5}{L}\right)^2} \quad (28)$$

Der folgende Matlabcode zeigt die Berechnung der Moden. Die Schallgeschwindigkeit c wird konstant mit dem zuvor ermittelten Mittelwert, wie in Abschnitt 2.1 berechnet, angenommen.

```

1  % Berechnung der Modenfrequenzen
2  m = 1:4;
3  l = 1:4;
4  [m,l] = meshgrid(m,l);
5
6  L = .79;
7  M = .65;
8  f = c/2 * sqrt( (m(:)/M).^2 + ((l(:)+.5)/L).^2 );
9  f = sort(f)

```

Je höher der Frequenzbereich, desto höher die Modendichte.

Berechnet man die ersten Moden für $m = l = 1 \dots 4$, erhält man folgende Frequenzen:

215.7	319.1	413.9	476.1	520.8	568.4	610.8	669.3
310.6	389.6	440.5	493.9	564.7	571.4	647.1	740.1

Tabelle 6: Modenfrequenzen in Hz für $m = l = 1 \dots 4$

Auf den ersten Blick scheint es, als wäre nur geringe Übereinstimmung mit den Plots aus den Tabellen 3, 4 und 5 vorhanden (z.B. 647.1Hz mit 646.8Hz aus Tabelle 3, rechts unten).

Berücksichtigt man jedoch die Tatsache, dass wir für die Berechnung der Modenfrequenzen einen Mittelwert der Schallgeschwindigkeit C angenommen haben, ist das keine Überraschung.

Wie in Abbildung 13 zu sehen, muss $C = C(f)$ frequenzabhängig gewählt werden, um die Modenfrequenzen noch genauer und realitätsgetreuer zu bestimmen. Vor allem bei tiefen Frequenzen, ist die Schallgeschwindigkeit deutlich langsamer, als mit dem Mittelwert angenommen. Das hat auch zur Folge, dass die tiefste berechnete Modenfrequenz deutlich über den gemessenen Werten liegt.

Ein weiterer Grund für die Abweichungen sind Messungenauigkeiten, vor allem bei der Messung der Schallgeschwindigkeit.

Literatur

[Zot10] F. Zotter, "Laborunterlagen akustische messtechnik 2, lu, s2010," Ausgabe 2010.