

# Akustische Holofonie und Holografie

Dr Franz Zotter  
Graz, 17. Januar 2016



institut für elektronische musik und akustik



## Zusammenfassung

Warum ist es sinnvoll, eine komplizierte Feldtheorie aufzubauen, und sie für die Vermessung und Wiederherstellung von räumlichem Schall einzusetzen? Inwieweit werden die Zielvorstellungen getroffen?

Und wie können wir mit dem Formelapparat Wellenfelder durch Messungen bzw. Aufnahmen mit verteilten Mikrofonen beschreiben? Wie können wir Wellenfelder durch verteilte Lautsprecher großräumig erzeugen? Wo sind die Grenzen dazu bestimmter Verfahren, und wo kommen sie her?

Ein grundlegender Zusammenhang dafür ist die Helmholtzgleichung. Sie beschreibt das Verhalten der Wellen in der Luft als freies Medium. Die einfachstmögliche Herkunft der linearen Wellengleichung wird anhand eines Feder-Masse-Systems vorgeführt. Nach dem Überführen in die Helmholtzgleichung wird schrittweise die Anzahl der Dimensionen von null auf drei erweitert. Ebene Wellen und Green'schen Funktionen erhalten wir als erste Freifeldlösungen. Diese sind bereits nützlich, um Fernfeldrichtwirkungen differentieller Arrays zu modellieren.

Fügen wir schallharte Randbedingungen ein, sehen wir, dass stets Moden und diskrete Frequenzen auftreten müssen. Gut zur einfachen Modellierung von Rechteckräumen, im Allgemeinen ist das aber ungünstig für vollständige Holografie/Holofonie aller Frequenzen.

Eine grundlegendere Theorie zur Darstellung freier Felder anhand ihrer Randwerte erhalten wir über die Herleitung des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals (KHI). Dabei stoßen wir nicht nur auf die formale Antwort auf die Existenzfrage von Holografie/Holofonie, sondern auch auf die Ausstrahlungsbedingung von Sommerfeld, eine physikalisch grundlegende Eindeutigkeitsbedingung.

Damit lassen sich nun alle existierenden Anwendungen herleiten. Planare Holografie mit ebenen Mikrofonfeldern ist unsere erste Anwendung, die dem Rayleighintegral entspringt. Zur Berechnung gibt es Fourier-Näherungen und völlig neue Ansätze der letzten Jahre.

Ein der Schallfeldsynthese äquivalentes Beugungsproblem wird eingeführt und motiviert. Es ergibt in einer Hochfrequenzvereinfachung die Wellenfeldsynthese (WFS) und Ambisonics als analytische Lösung bei sphärischer Geometrie.

Auf die analytischen Lösungen und konkreten Anwendungen der sphärischen Holografie wird in einem eigenen Abschnitt eingegangen, weil die Mathematik der sphärischen Lösungen alleine ganz besonders modulare und effiziente praktische Umsetzungen ermöglicht.

TODO 2015/16 – alljährliche Renovierungsarbeit in den Unterlagen zur akustischen Holografie und Holografie:

- Beispiele aus Philipp Schmidts Diplomarbeit zu planaren L1-Holo
- evtl. Synthese von Diffusität in Ambisonics-Abschnitt einbauen
- Abschnitt mit falscher Lösung wohin? / mit Helmholtzzahl ergänzen?
- (in jetzt 7) 2D Polarkoordinaten evtl. in den Anhang.
- (jetzt 8.9.3) evtl Abtastung Kugel durch t-designs ergänzen
- Akustisches Zentrierungsproblem?
- Ambisonische Dekoder
- (jetzt 8.11) evtl mit Stefan Löslers/Robert Baumgartners/Michael Kerschers Regularisierungsfiltren ausführlicher ergänzen, oder diese bereits in 3.4 vorwegnehmen.
- Raumantwortanalyse durch sphärische Mikrofon- und Lautsprecherarrays umreißen.
- Ausblick auf neue Lösungsmöglichkeiten für Randbedingungen im Winkel.
- Aufwerfen ausstehender Wahrnehmungsfragen im Ausblick

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>8</b>
1.1	Begriffsklärung . . . . .	8
1.2	Anwendungsbeispiele . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Die Helmholtzgleichung (Herleitung, kartesische Koordinaten)</b>	<b>10</b>
2.1	Differentielles Masse-Feder-Segment. . . . .	10
2.2	0D Wellengleichung (Schwingungsgleichung) . . . . .	11
2.3	1D Wellengleichung (longitudinales Medium mit Feder-Massebelag) . . . . .	13
2.4	1D Helmholtzgleichung . . . . .	17
2.5	Helmholtzgleichung in höheren Dimensionen . . . . .	18
2.5.1	Homogene Lösung: ebene Wellen . . . . .	19
2.5.2	Schallhart begrenzte Hohlräume: rechtwinkelige Räume . . . . .	22
2.5.3	Green'sche Funktion im Freifeld . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Theoretische Holografie und Holofonie</b>	<b>30</b>
3.1	Kirchhoff-Helmholtz Integral (KHI) . . . . .	32
3.1.1	Das KHI als idealer Schallschlucker . . . . .	33
3.1.2	Das KHI zur Berechnung von Beugung/Streuung/Reflexion . . . . .	33
3.1.3	Die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung . . . . .	34
3.2	Theoretische Holofonie mit dem Einschichtpotential . . . . .	35
3.3	Wellenfeldsynthese . . . . .	37
3.4	Rayleigh-Integrale . . . . .	39
3.4.1	Was sich von den Rayleigh-Integralen lernen lässt . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Planare Holografie / Holofonie</b>	<b>41</b>
4.1	Planare Nahfeldholografie mit Mikrofonarray . . . . .	41
4.1.1	Fehlerquadratminimierung und Quadratminimierungsaufgaben . . . . .	43
4.1.2	Konditionierung einer Matrix . . . . .	44

<i>Zotter: Akustische Holografie und Holofonie</i>	5
4.1.3 $L_p$ -Norm-Minimierung . . . . .	45
4.2 Feldberechnung bei Schnelle-Randwertaufgabe entlang $x$ . . . . .	46
4.3 Fouriertransformation für planare Holophonie/Holografie . . . . .	46
4.3.1 Fernfeldrichtwirkung: . . . . .	46
4.3.2 Holografische Auswertung, Schalldruck entlang $x$ bekannt. . . . .	47
4.3.3 Beispiel: Fernfeldholofonie für endliche lineare Lautsprecherzeile in 2D . . . . .	47
4.3.4 Beispiel: Holografie mit endlicher linearer 1D Mikrofonzeile in 2D	50
4.3.5 Randwertaufgabe: Schnelle entlang $x, y$ . . . . .	51
4.3.6 Holografische Auswertung, Schalldruck entlang $x, y$ bekannt. . . . .	51
4.3.7 Aliasing . . . . .	55
<b>5 Freifeldlösungen differenziert:</b>	
<b>Differentielle Arrays und Richtungspolynome</b>	<b>56</b>
5.1 Lineare Mikrofon- oder Lautsprecheranordnungen: ebene Wellen und Green'sche Funktionen örtlich abgeleitet . . . . .	56
5.2 Richtwirkungsentwurf mit Polynomen . . . . .	59
5.3 Relative Fehler bei realistischer Kalibriergenauigkeit . . . . .	62
5.4 Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen . . . . .	63
5.5 Ambisonisches Amplitudenschwenken leicht gemacht: optimale Abtastung eindimensionaler Richtfunktionen . . . . .	63
<b>6 Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten</b>	<b>66</b>
6.1 Ableitungsoperatoren in nichtkartesischen Koordinatensystemen . . . . .	67
6.2 Helmholtzgleichung des $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten . . . . .	68
6.2.1 Kugelkoordinaten . . . . .	68
6.2.2 Laplace-Operator in Kugelkoordinaten . . . . .	68
6.2.3 Lösung der DGL in $\varphi$ , Glg. (147) . . . . .	69
6.2.4 Lösung der DGL in $\vartheta$ , Glg. (148) . . . . .	69
6.2.5 Lösung der DGL in $r$ , Glg. (149) . . . . .	71
6.3 Lösungen für inneres und äußeres Problem im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	73
6.3.1 Sphärische Basislösungen . . . . .	73
6.3.2 Lösung der kugelförmigen Quellverteilung in Kugelkoordinaten 3D	74
6.3.3 Punktquelle in 3D . . . . .	76
<b>7 Sphärische Holografie / Holofonie</b>	<b>76</b>

<i>Zotter: Akustische Holografie und Holografie</i>	6
7.1 Kugelförmige Mikrofon / Lautsprecherarrays . . . . .	76
7.2 Verwendete Lösungen . . . . .	76
7.3 Kugelflächenfunktionen . . . . .	77
7.4 Sphärische Bessel / Neumannfunktionen . . . . .	77
7.5 Matrixnotation von kugelförmigen Aufgaben . . . . .	78
7.6 Theorie zur Messung der Schallabstrahlung . . . . .	79
7.7 Theorie zur Erzeugung von Schallabstrahlung . . . . .	82
7.7.1 Kugelkappenmodell durch Faltung auf der Kugel . . . . .	82
7.7.2 Randwertproblem: Wellenspektrum des Kugelkappenmodells . .	83
7.8 Theorie zur Erzeugung von Schalleinstrahlung . . . . .	84
7.9 Diskrete Zerlegung und Erzeugung von Kugelflächenfunktionen . . . . .	86
7.9.1 Zerlegung: ortsdiskretisierte Kugelflächenfunktionenreihe . . . .	86
7.9.2 Erzeugung: Steuerung sphärischer Spektren mit gesteuerten Punk-	
ten . . . . .	87
7.9.3 Inversion . . . . .	88
7.10 Theorie zur Messung der Schalleinstrahlung . . . . .	91
7.11 Radiale Scharfstellfilter / Holografiefilter . . . . .	92
<b>A Beispiel: Schalleinfallrichtungsanalyse mit Kreisring-Mikrofonanordnung</b>	<b>99</b>
<b>B Evaneszente Wellen der kartesischen Lösungen</b>	<b>99</b>
<b>C Green'sche Funktion durch richtungsunabhängiges Koordinatensystem</b>	<b>105</b>
<b>D Green'sche Funktion durch Residuenintegrale und auf komplexen Integrati-</b>	
<b>    onswegen</b>	<b>107</b>
<b>E Optimierung rotationssymmetrischer Richtmustern</b>	<b>108</b>
<b>F Gauß'scher Integralsatz, rechte Gleichungsseite</b>	<b>110</b>
<b>G Laplace-Operator in Polarkoordinaten</b>	<b>112</b>
<b>H Laplace-Operator in Kugelkoordinaten</b>	<b>113</b>
<b>I Helmholtzgleichung des <math>\mathbb{R}^2</math> in Polarkoordinaten</b>	<b>114</b>
I.0.1 Separation der Helmholtzgleichung in Polarkoordinaten . . . . .	115

<i>Zotter: Akustische Holografie und Holografie</i>	7
I.0.2 Lösung der Differentialgl. (246) im Winkel $\varphi$ . . . . .	116
I.0.3 Lösung der Differentialgl. (247) im Radius $r$ . . . . .	116
I.1 Lösungen für inneres und äußeres Problem im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	117
I.1.1 Polare Basislösungen . . . . .	118
I.1.2 Quellverteilungen im Winkel . . . . .	119
I.1.3 Lösung der kreisförmigen Quellverteilung in Polarkoordinaten 2D	119
I.1.4 Punktquelle in 2D . . . . .	120
<b>J Separation der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten</b>	<b>123</b>
<b>K Lösung der sphärischen Bessel'schen DGL</b>	<b>124</b>

# 1 Einleitung

Obwohl die Theorie zur akustischen Holografie und Holofonie zu abgehoben für die Praxis erscheint, so ist dennoch interessant, wie weit sie führt. Zwar trifft für kein einschlägiges Verfahren (z.B. Wellenfeldsynthese, Ambisonics) zu, dass theoretische Ergebnisse in voller Tragweite umsetzbar sind. Trotz scheinbar schmerzlicher Einschnitte erreichen die angewandten Ansätze dennoch überraschend weitreichende Ergebnisse. Sowohl die Kenntnis praktischer Gegebenheiten angewandter Ansätze ist wichtig, als auch das grundlegende Verständnis zu Grunde liegender Theorie. Die Vorlesung versucht umfassend, theoretische Erklärungen und praktisches Wissen zu vermitteln.

## 1.1 Begriffsklärung

**Herkunft der Begriffe.** *Holografie* und *Holofonie* sind aus (alt-)griechischen Wörtern zusammengesetzte Begriffe. Ohne tief zu recherchieren, bringt das Internet folgende Übersetzungen<sup>1</sup> (lateinische Schriftzeichen):

altgriechisch	deutsch
„holos“	„ganz“
„grapho“	„schreiben“, „zeichnen“
„phoné“	„Stimme“

**Begriffsbildung in der Wissenschaft.** Der Begriff *Holografie*, laut einfacher Internetquellen, ist der Optik entsprungen. Oft werden populär dreidimensionale Lichtabbildungen darunter verstanden. Dennoch ist der Begriff wissenschaftlich älter und gewichtig: Für die hochauflösende Technologie der Rasterelektronenmikroskopie ist die Wellennatur des Lichtes sehr wichtig. Holografie nützt genaueste Modelle der Interferenzen des Lichts, um bessere Abbildungen zu erhalten<sup>2</sup>.

*Akustische Holografie* meint grundsätzlich, eine vollständige Aufzeichnung von Schallfeldern. Die Gleichungen für akustische Holografie sind (z.B. 1969 [Cap69]) aus der Seismografie bekannt und wurden z.B. 1980 auf Mikrofonmessungen angewandt (Williams, Maynard und Skudrzyk [WMS80]; Weinreich und Arnold [WA80]). 1985 ist der Begriff Nahfeldholografie dazugekommen [MWL85]. 1988 wurde Holografie auf Lautsprecherwiedergabe (später Holofonie) und Mikrofonaufnahme angewendet (Berkhout [Ber88]).

*Holofonie* stammt aus unterschiedlichen Quellen.<sup>3</sup> Holofonie wird als Begriff für Wellenfeldsynthese und Ambisonics verwendet, Verfahren, die eine technische Rekonstruktion von Schallfeldern anstreben. Eine andere Bedeutung trägt Holofonie zudem: die Funktion des räumlichen Hörens in unserer Wahrnehmung.

1. [http://de.wikipedia.org/wiki/Liste\\_griechischer\\_Wortstämme\\_in\\_deutschen\\_Fremdwörtern](http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_griechischer_Wortstämme_in_deutschen_Fremdwörtern)

2. Wikipedia: Dennis Gabór erhielt den Physik-Nobelpreis für seine Erfindung der Holografie 1947 zur Verbesserung der Elektronenmikroskopie 1971.

3. Laut <http://fr.academic.ru/dic.nsf/frwiki/787433> (französisch): stammt „Holophonics“ von Hugo Zucharelli 1980 und bezeichnet Binauralaufnahmen von Musik. „Holophonie“ taucht um 1973 in Arbeiten von Maurice Jessel [Jes73] auf. Er und seine Forschung setzt sich mit der Theorie und Methoden zur elektroakustisch aktiven Absorption auseinander. 1977 beschrieb András Illényi [Ill77] (<http://alpha.tmit.bme.hu/Num7/a476.htm>) Holofonie als Eigenschaft des menschlichen Hörens, in allen neuronalen und kognitiven Wahrnehmungsstufen, ein Schallfeld als Summe lokalisierter Bestandteile wahrzunehmen.

**Begriffsdefinition hier:**

Der Begriff *akustische Holografie* soll hier als Begriff der Mikrofonarraytechnik eingesetzt werden:

*Aufzeichnung von Größen eines Schallfeldes mit verteilten Mikrofonen mit dem Ziel, das Schallfeld in die tiefe grafisch darstellen oder wiederherstellen zu können, sowie die dazu benötigten Grundlagen.*

Ein soartetes Begriffsverständnis findet sich so auch im Buch „Fourier Acoustics“ von Earl G. Williams [Wil99].

*Akustische Holografie* soll hier verstanden werden als:

*Wiedergabe von Schall mit Lautsprecheranordnungen, um damit Schallfelder mit Tiefeninformation technisch zu rekonstruieren und zugehörige Grundlagen (ohne vorrangig perzeptives Ziel).*

Dieses Verständnis findet sich bei Jessel [Jes73] und in der neueren Literatur über Ambisonics, sowie Abstrahlungsanalyse (Daniel [Dan00], Poletti [Pol05], Zotter [Zot09a]) und in der Wellenfeldsynthese (Berkhout [Ber88]).

Beide Begriffe können auch die Techniken rund um die akustische Strahlformung (*beamforming*) miteinschließen, werden hier aber größtenteils klassischer, d.h. weniger auf Optimierungsmethoden basiert, behandelt.

## 1.2 Anwendungsbeispiele

Als Anwendungsbeispiele sind in den Vortragsunterlagen der Einführungseinheit (<http://iaem.at/kurse/>) einige Bilder zu sehen (Folien im PDF-Format liegen online. Ein paar Namen bekannter Kollegen:

Ambi (Gerzon, Craven, York: Malham), Paris/Lannion (Nicol, Daniel, orange), IEM-CUBE / MUMUTH, Berlin (T-Labs: Spors), Southampton (ISVR: Nelson, Fazi), Sydney (Jin, van Schaik, Epain), Kentucky (Hannemann)...

WFS Delft (Berkhout, de Vries, Verheijen), Ilmenau (Melchior-jetzt bei BBC-R&D, Sporer), Berlin (TU: Weinzierl, Görtz/Makarski, T-Labs: Spors, Ahrens), Paris (ircam: Warusfel, Corteel, ...), Erfurt (IOSONO: Melchior-jetzt bei BBC-R&D), Schweiz/Paris (Sonic Emotion: Corteel, Pellegrini), ...

Mikrofonarray Wien/Graz (auch EMT/ACCLms), B&K, LMS, microflown, ...

Mikrofonkugel Maryland (Duraiswami, Li, ODonovan, Zotkin), New Jersey (mhacoustics: Meyer, Elko), Beer-Sheva (Rafaely), Lannion (orange: Daniel, Nicol, Epain), Dänemark (Uni: Juhl, Petersen, B&K: Hald, Song), Japan (Nittobo: Takashima, Williams, SENZI: Sakamoto), Sydney (Jin, van Schaik), ...

Mikrofonkugel Aachen (Behler, Pollow), Espoo (Lokki, Pätynen), IEM-Graz, ...

Lautsprecherkugel Berkeley (Avizienis, Kassakian, Schmeder), Aachen (Pollow, Behler), Graz (Zotter, Pomberger), Marseilles/Campinas (Pasqual, Herzog, Arruda), Beer-Sheva (Rafaely)...

## 2 Die Helmholtzgleichung (Herleitung, kartesische Koordinaten)

Holografie und Holografie beruft sich in dieser Vorlesung auf die lineare verlustlose Wellengleichung im Frequenzbereich, die Helmholtzgleichung. Diese ist die Grundlage zur praktischen Umsetzung holografischer/hologföner Aufgabenstellungen und wird in diesem Kapitel im kartesischen Koordinatensystem auf Basis bekannter, Newton'scher Bewegungsgleichungen (Masse  $F = m\ddot{\xi}$ , Federung  $F = s\xi$ ) hergeleitet. Die Herleitung der Helmholtzgleichung beginnt mit einem differentiellen mechanischen Segment, das in Verkettung ein wellenausbreitungsfähiges System ergibt. Die Überführung angreifender Kräfte in flächenbezogene Kräfte, also Drücke, ergibt die Helmholtzgleichung.

### 2.1 Differentielles Masse-Feder-Segment.

Die kompakteste Herleitung der Wellengleichung lässt sich auf ein differentiell schmales Masse-Feder-Segment aufbauen. In Abb. 1 beschreibt die Dimension  $x$  eine Position auf

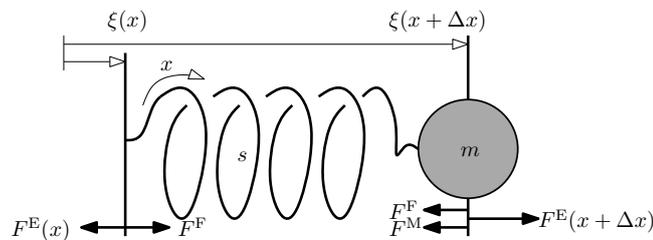


Abbildung 1 – Differentielles Masse-Feder-Segment.

der Feder, z.B. die dritte Windung. Die Koordinate  $\xi(x)$  hingegen beschreibt die Lage des zugehörigen Punktes im Raum, vgl. [Mös09].

**Federwirkung, Masse.** Eine Feder reagiert mit einer Kraft, wenn sie aus dem entspannten Zustand  $\xi_{\text{entsp}}(x) = x$  heraus verformt wird. Die Wegdifferenz  $\xi(x + \Delta x) - \xi(x)$  wäre entspannt  $\Delta x$ . Bei Verformung ergibt sich eine Federkraft proportional zur Längendifferenz  $\xi(x + \Delta x) - \xi(x) - \Delta x$  und Steifigkeit  $s$ . Ein Massenelement an der Stelle  $\xi(x + \Delta x)$  reagiert mit einer Kraft proportional zur Masse  $m$  und Beschleunigung  $\ddot{\xi}(x + \Delta x)$  ihrer Position. Die Gleichungen für die Einzelkräfte sind

$$F^F = s \left[ \xi(x + \Delta x) - \xi(x) - \Delta x \right] \quad \frac{\partial}{\partial t} \dot{F}^F = s \left[ v(x + \Delta x) - v(x) \right],$$

$$F^M = m \ddot{\xi}(x + \Delta x) \quad \frac{\partial}{\partial t} \dot{F}^M = m \ddot{v}(x + \Delta x).$$

Die Gelegenheit bot sich, alle zwei Gleichungen zeitlich abzuleiten, womit wir in der ersten Gleichung  $\Delta x$  loswerden. Danach taucht die Auslenkung  $\xi$  in den Gleichungen mindestens einmal abgeleitet auf, wodurch wir die Formelbuchstaben  $\dot{\xi} = v$ ,  $\ddot{\xi} = \dot{v}$ ,  $\ddot{\xi} = \ddot{v}$  durch die Schnelle und ihre Ableitungen ersetzen konnten. Am linken und rechten

Ende des Segments folgen aufgrund der rechtsseitigen Masse unterschiedliche Kräftegleichgewichte zwischen äußeren Kräften  $F^E(x)$  und  $F^E(x + \Delta x)$  und den drei inneren Einzelkräften:

$$\begin{aligned} \text{linkes Ende:} \quad F^E(x) &= F^F \\ \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{F}^E(x) &= s[v(x + \Delta x) - v(x)], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{rechtes Ende:} \quad F^E(x + \Delta x) &= F^F + F^M \\ \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{F}^E(x + \Delta x) &= s[v(x + \Delta x) - v(x)] + m \ddot{v}(x + \Delta x). \end{aligned} \quad (2)$$

## 2.2 0D Wellengleichung (Schwingungsgleichung)

Als mathematische Aufwärmübung berechnen wir die *schwingfähige* Lösung des einzelnen differentiellen Segmentes. Entlang der Dimension  $x$  werden also nur 2 Punkte  $(0, \Delta x)$  betrachtet, wonach das Problem als dimensionslos im Raum betrachtet wird.

Für klare Verhältnisse sorgt die Randbedingung  $v(0) = 0$  (linke Seite ist starr).  $v(0)$  fällt somit aus den Gln. (1)(2). Betrachten wir davon Gl. (2) für die rechte Stelle, so bleibt nach übersichtlichkeitsfördernder Weglassung von  $(x + \Delta x)$  die *Schwingungsgleichung*:

$$m \ddot{v} + s v = \dot{F}^E.$$

Oder nach der Ersetzung  $\omega_0 := \frac{s}{m}$

$$\left( \omega_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v = m \dot{F}^E. \quad (3)$$

**Homogene Lösung.** Wird die rechte Seite, damit die externe Kraft, auf null gesetzt, ergeben sich durch Lösen von

$$\omega_0^2 v + \ddot{v} = 0$$

die Eigenschwingungen des Systems. Wir setzen den Exponentialansatz  $v_h = e^{\lambda t}$  für die homogene Lösung an und setzen in die Differentialgleichung ein, mit  $\frac{\partial}{\partial t^2} e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ,

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 + \lambda^2) e^{\lambda t} &= 0, & \left| \frac{1}{e^{\lambda t}}, -\omega_0^2 \right. \\ \lambda^2 &= -\omega_0^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Gleichung definiert  $\lambda$  und nennt sich *charakteristische Gleichung*. Offensichtlich muss  $\lambda = \pm i\omega_0$  werden, womit beide Lösungen in beliebiger Linearkombination gelten,

$$v_h(t) = a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t}, \quad (5)$$

die z.B. bei  $a = b = \frac{1}{2}$  zur Lösung  $v_h(t) = \cos(\omega_0 t)$  führt.

**Inhomogene Lösung.** Die inhomogene Lösung wird aufwändiger angesetzt, weil sie aufgrund der erforderlichen Kausalität,  $v(t < 0) = 0$ , nicht mehr unendlich schmalbandig sein kann. Um zu einer elementaren Lösung zu gelangen, setzt man die rechte Gleichungsseite häufig auf  $\delta(t)$  und erhält eine *Green'sche Funktion* als Lösung. Die Anregung entspricht einer äußeren Kraft in Form einer skalierten Sprungfunktion  $F^E = m u(t)$ . Wir setzen die Lösung als Linearkombination homogener Lösungen unbekannter Gewichtung  $\nu(\omega)$  an:

$$v_{\text{in}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \nu(\omega) d\omega,$$

und wir erhalten nach Einsetzen in die Schwingungsgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\omega_0^2 + (i\omega)^2] e^{i\omega t} \nu(\omega) d\omega = \delta(t).$$

Zur Auflösung der Gleichung nach  $\nu(\omega)$  wird über  $t$  Fourier-transformiert  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega' t} dt$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_0^2 - \omega^2) \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega') t} dt \right)}_{2\pi\delta(\omega - \omega')} \nu(\omega) d\omega &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega' t} dt}_{=1}, \\ \Rightarrow \nu(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Der Frequenzgang  $\nu(\omega)$  ist offenbar nirgendwo 0, besitzt aber mit  $\omega_0^2 = \frac{s}{m} \in \mathbb{R}$  zwei unendliche Resonanzen. Für eine Lösung im Zeitbereich bleibt uns

$$v_{\text{in}}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad (6)$$

zu berechnen. Durch Partialbruchzerlegung vereinzeln wir die Polstellen  $\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{A}{\omega - \omega_0} + \frac{B}{\omega + \omega_0}$ , d.h.  $1 = A(\omega + \omega_0) + B(\omega - \omega_0)$ , somit  $A = -B = \frac{1}{2\omega_0}$ , und wir erhalten

$$v_{\text{in}}(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_0} - \frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_0} \right] d\omega.$$

Die Polstellen  $\pm\omega_0$  liegen auf dem Integrationsweg. Deswegen *regularisieren* wir die Gleichung [KT14] durch den imaginären Ausdruck  $i\epsilon$ :

$$v_{\text{in}}(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\omega_0} \lim_{|\epsilon| \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} - \frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_0 - i\epsilon} \right] d\omega.$$

Zur Auswertung des Integrals verwenden wir das *Lemma von Jordan*. Demzufolge darf das uneigentliche Integral über  $\omega$  mit einem Halbkreis über jenen Teil der komplexen Zahlenebene im Unendlichen geschlossen werden, für den der Integrand verschwindet. Für  $t \geq 0$  verschwindet der Integrand  $e^{i\omega t}$  bei  $\Im\{\omega\} \rightarrow \infty$  nur auf dem Halbkreis  $C_+$  mit mathematisch positiver Umlaufrichtung. Für  $t < 0$  gilt der Halbkreis  $C_-$ , siehe Abb. 2.

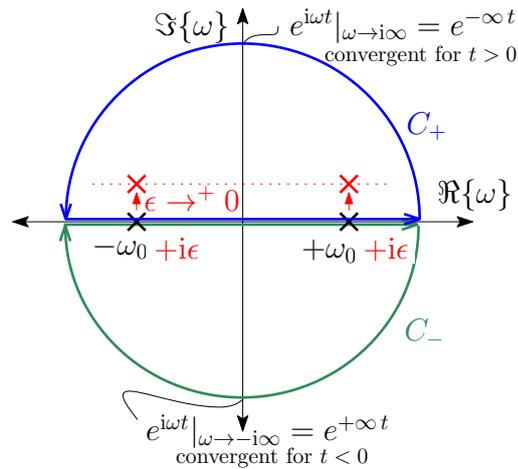


Abbildung 2 – Regularisierung der Polstellen für die inhomogene Lösung des Masse-Feder-Systems und Schließen des uneigentlichen Integrals über  $C_+$  durch die positive imaginäre Halbebene bei  $t \geq 0$  oder die negative  $C_-$  für  $t < 0$ .

Die Cauchy’sche Integralformel ergibt für einen Integrationsweg, der die Polstelle  $z_0$  umschließt  $\oint \frac{f(z)}{z-z_0} = \pm 2\pi i f(z_0)$ , sonst null; die Umlaufrichtung bestimmt das Vorzeichen.

Fordern wir Kausalität,  $v_{in}(t < 0) = 0$ , muss  $C_+$  beide Polstellen enthalten, damit das Integral über  $C_-$  verschwindet. In der kausalen Lösung ist  $\epsilon$  für beide Pole positiv:

$$v_{in}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{-\epsilon t} \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\omega_0} 2\pi i [e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}] = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) u(t). \quad (7)$$

Ein positives  $\epsilon$  entspricht dem Einfügen eines Reibwiderstandes parallel zur Feder. Daher wird die Regularisierung auch Methode der verschwindenden Verluste [Sch12b] genannt.

### 2.3 1D Wellengleichung (longitudinales Medium mit Feder-Massebelag)

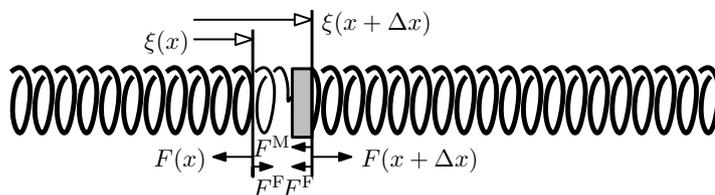


Abbildung 3 – Kontinuierliche Feder mit Feder- und Massenbelag.

Ein eindimensionales Medium wird durch eine Kette infinitesimal schmaler Masse-Feder-Segmente aus Abb. 1 beschrieben, Abb. 3. Dabei gelten spezifische, längenbezogene Werte für das Material: Massebelag  $\rho$ , Kompressionsmodul  $K$ . Dabei steigt die Masse mit zunehmender Materiallänge  $m = \rho \Delta x$ , während Steifigkeit damit abnimmt:  $s = K/\Delta x$ .

Subtrahieren wir die Gln. (2)(1) und bilden den Grenzwert  $\Delta x \rightarrow 0$ , erhalten wir einen Differentialquotienten, also eine partielle örtliche Ableitung:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \rho \Delta x \dot{v}(x + \Delta x), \quad \left| \text{mit } \frac{1}{\Delta x} \text{ und } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \rho \dot{v}. \quad (8)$$

Das selbe gilt für Gl. (2) zeitlich abgeleitet

$$\dot{F}(x) = K \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}, \quad \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \right.$$

$$\dot{F}(x) = K \frac{\partial}{\partial x} v. \quad (9)$$

Die örtlich abgeleitete Gl. (9) ergibt mit der zeitlich abgeleiteten Gl. (8)  $K \frac{\partial^2}{\partial x^2} v = \rho \ddot{v}$ . Nach Division durch  $K$  und Ersetzung  $c^2 = \frac{\rho}{K}$  ist folgende Kompaktschreibweise üblich

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v = 0. \quad (10)$$

Diese Gleichung wird *Wellengleichung* genannt.

Sie besteht offenbar aus einer Schwingungsgleichung in der Zeit, die über  $\frac{1}{c^2}$  mit einer Schwingungsgleichung im Ort verknüpft ist.

**Homogene Lösung.** Ein Produktansatz aus zwei Exponentialansätzen ist zur Lösung der Differentialgleichungen in mehrerer Variablen geeignet:  $e^{i\omega t}$ ,  $e^{ikx}$ . Die Ansätze werden mit einem *Produktansatz* verknüpft und ergeben einen so genannten Separationsansatz  $v_h = e^{i\omega t} e^{ikx}$ . Gl. (10) liefert uns nach Einsetzen der Ableitungen die *charakteristische Gleichung*:

$$(ik)^2 v_h - \frac{(i\omega)^2}{c^2} v_h = 0 \quad \left| \frac{1}{v_h} \right.$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (11)$$

Somit muss  $k = \pm\omega/c$  sein und die homogene Lösung ist bei frei wählbarer Frequenz  $\omega$ :

$$v_h = a e^{i\omega t + ikx} + b e^{i\omega t - ikx}. \quad (12)$$

Nachdem negative Phase einer Verzögerung entspricht, kann nun abgelesen werden, dass die Lösung  $e^{i\omega t + ikx}$  bei negativen  $x$  später ankommt, also eine rücklaufende Welle ist. Die andere Welle  $e^{i\omega t - ikx}$  kommt bei positiven  $x$  später an, ist also eine hinlaufende Welle.

**Inhomogene Lösung.** Wird die Wellengleichung am Zeitpunkt  $t = 0$  und Ort  $x = 0$  angeregt

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v = \delta(t) \delta(x). \quad (13)$$

können wir den folgenden Ansatz wählen

$$v_{\text{in}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\omega, k) e^{i\omega t} e^{ikx} dk d\omega \quad (14)$$

und erhalten nach dem Einsetzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (ik)^2 - \frac{(i\omega)^2}{c^2} \right] \nu(\omega, k) e^{i\omega t} e^{ikx} dk d\omega = \delta(t) \delta(x) \quad (15)$$

und zweifacher Anwendung der Fourier-Transformation  $\iint e^{ik'x} e^{i\omega't} dx dt$ , der Orthogonalitäten  $\int e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k-k')$ ,  $\int e^{i(\omega-\omega')t} dt = 2\pi\delta(t-t')$ ,

$$\nu(\omega, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{c^2}{\omega^2 - k^2 c^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{c^2}{(\omega - kc)(\omega + kc)}. \quad (16)$$

**Kausalität**  $v_{\text{in}}(t < 0) = 0$  bezüglich der Rücktransformation in der Zeit verlangt eine Verschiebung der Pole nach  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{c^2}{(\omega - i\epsilon - kc)(\omega - i\epsilon + kc)}$ . Das Wissen über die nötige kausale Verschiebung genügt uns zur Beschreibung der physikalischen Lösung im Frequenzbereich. Wir transformieren den Spektralkoeffizienten  $\nu(\omega, k)$  in Gl. (14) nur mehr in den Ort zurück. Die Partialbruchzerlegung bezüglich  $k$  ergibt:

$$\nu(\omega, k) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{c}{2\omega} \left[ \frac{1}{k - \frac{\omega - i\epsilon}{c}} - \frac{1}{k + \frac{\omega - i\epsilon}{c}} \right]. \quad (17)$$

$$v(\omega, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \frac{c}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{ikx}}{k - \frac{\omega - i\epsilon}{c}} - \frac{e^{ikx}}{k + \frac{\omega - i\epsilon}{c}} \right] d\omega. \quad (18)$$

Offensichtlich haben wir nun die Polstellen an  $kc = \pm[\omega - i\epsilon]$ . Wenden wir für den

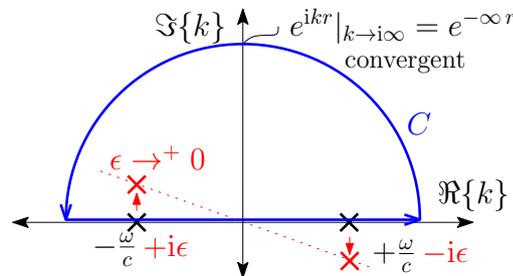


Abbildung 4 – Zeitlich regularisierte Polstellen für die inhomogene Lösung der Wellengleichung bezüglich der Wellenzahl  $k$ . Schließen des uneigentlichen Integrals über die positive imaginäre Halbebene  $C_+$  erfolgt für  $x \geq 0$ , für die negative  $C_-$  für  $x < 0$ .

Integranden  $e^{ikx}$  das Lemma von Jordan an, so schließt bei  $x \geq 0$  das halbkreisförmige Konturintegral über die positive imaginäre Achse nur die zweite Polstelle  $kc = -\omega + i\epsilon$  ein, siehe Abb. 4. Bei  $x < 0$  wird im mathematisch negativen Sinn über die negative imaginäre Achse integriert und die Polstelle  $kc = \omega - i\epsilon$  eingeschlossen. Der Vorzeichenwechsel für die mathematisch unterschiedlich orientierten Integrationswege ergänzt sich günstig mit den Vorzeichen der Brüche:

$$v_{\text{in}}(\omega, x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{c}{2\omega} 2\pi i e^{-i\frac{\omega}{c}|x|} = \frac{c}{2i\omega} e^{-i\frac{\omega}{c}|x|}.$$

Es ist typisch und zulässig,  $\frac{\omega}{c}$  durch den Buchstaben  $k$  zu vereinfachen

$$v_{\text{in}} = \frac{e^{-ik|x|}}{2ik}. \quad (19)$$

## 2.4 1D Helmholtzgleichung

Die Schallausbreitung in der Luft ist äquivalent zu jener des zuvor beschriebenen Mediums mit Masse und Federbelag, nur dass anstelle der negativen Kraft (=Zugspannung) pro Fläche der Druck in den Grundgleichungen  $p = -F/A$  vorkommt. Weil gewöhnliche Luftwellen keine Abwärme produzieren (*adiabatischer Zustand*, d.h. nur kurzfristige, lokale Wärmeschwankung), ist die Gleichung verlustlos. Der adiabatische Zustand

$$p V^\kappa = \text{const.} \quad (20)$$

hat für Luft den Isotropenindex  $\kappa = 1.4$ . Auch nach einem Zustandsübergang  $(p_0, V_0) \rightarrow (p_0 + \Delta p, V_0 + \Delta V)$  muss sich die selbe Konstante ergeben. Herausheben der ursprünglichen Zustände erleichtert die Linearisierung für kleine Volumsänderungen:

$$p_0 V_0^\kappa = p_0 V_0^\kappa \underbrace{\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\kappa}_{=1} \Rightarrow 1 + \frac{\Delta p}{p_0} = \underbrace{\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\kappa}}_{\approx 1 - \kappa \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{\kappa(\kappa-1)}{2!} \frac{\Delta V^2}{V_0^2} \dots}$$

$$\Rightarrow \Delta p = -\kappa p_0 \frac{\Delta V}{V_0}.$$

In der nun linearen Zustandsgleichung für kleine Volumsänderung<sup>4</sup>  $\Delta V = V - \Delta x \Delta y \Delta z$  führen wir das veränderte Volumen auf eine veränderte Auslenkung in  $x$ -Richtung zurück

$$V = [\xi(x + \Delta x) - \xi(x)] \Delta y \Delta z = \Delta \xi \Delta y \Delta z = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} V_0, \Rightarrow \Delta p = -\kappa p_0 \left( \frac{\Delta \xi}{\Delta x} - 1 \right).$$

Differenzieren wir zeitlich,  $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{\partial(p-p_0)}{\partial t} = \dot{p}$ , sowie  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Delta \xi}{\Delta x} - 1 \right) = \frac{\Delta v}{\Delta x}$ , und bilden wir  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ , so bleibt die Kompressionsgleichung:

$$\dot{p} = -\kappa p_0 \frac{\partial v}{\partial x},$$

und die Konstanten ergeben das Kompressionsmodul  $K = \kappa p_0 \approx 1.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Die Euler'sche Bewegungsgleichung ist ähnlich zu Gl. (8),  $\Delta F = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v}{\partial t}$ , nur setzen wir die äußere Zugkraft als Unterdruck auf die belastete Außenfläche  $F = -p \Delta y \Delta z$  ein und erhalten  $-\Delta p \Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v}{\partial t}$ . Division durch  $\Delta x \Delta y \Delta z$  und  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  ergibt die Bewegungsgleichung. Gemeinsam ist das mit der Kompressionsgleichung im Überblick und zusammengesetzt ( $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ ),

$$\begin{aligned} \rho \dot{v} &= -\frac{\partial}{\partial x} p, \\ -\dot{p} &= K \frac{\partial}{\partial x} v, \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p &= 0. \end{aligned}$$

4. Ausreichend klein ist die Volumsänderung, solange das Reihenglied 2. Ordnung gegen jenes 1. Ordnung verschwindet  $\frac{\kappa(\kappa-1)}{2!} \frac{\Delta V^2}{V_0^2} \ll \kappa \frac{\Delta V}{V_0}$ . Gleichheit  $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{2}{\kappa-1} \approx 7$  würde einen Wechselschalldruck von  $|\Delta p| = \kappa p_0 \frac{\Delta V}{V_0} = 7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  bedeuten; auf  $2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$  bezogen immerhin 210 dB.

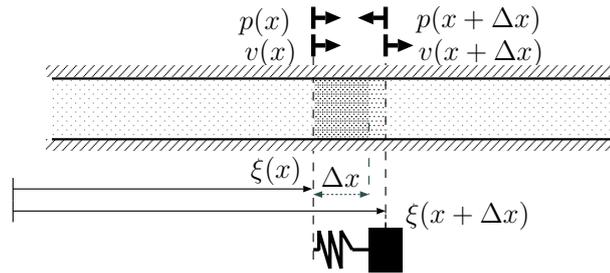


Abbildung 5 – Modell für lin. verlustlose Wellenausbreitung.

Ein Teilchen beginnt sich laut erster Gleichung in jene Richtung zu bewegen, in die der Druck kleiner wird. Laut zweiter Gleichung führt zur Druckminderung im Luftsegment, wenn das vordere Ende schneller als das hintere in Bewegungsrichtung unterwegs ist.

Wir verwenden gleich den Exponentialansatz in der Zeit und schreiben die Gleichung im Fourier-Bereich an mit  $p(t) = p(\omega)e^{i\omega t}$ , also mit der etwas schwungvollen Konvention der Akustik, selbe Buchstaben für Zeit- und Frequenzbereich zu verwenden.

Die daraus resultierende verlustlose lineare Wellengleichung im Frequenzbereich wird *Helmholtz-Gleichung* genannt:

$$\frac{\partial}{\partial x} p = -i\omega \rho v \quad \text{Eulergleichung,} \quad (21)$$

$$i\omega p = -K \frac{\partial}{\partial x} v \quad \text{Kompressionsgleichung,} \quad (22)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) p = 0, \quad \text{1D Helmholtzgleichung} \quad (23)$$

*Erkennen, ob die Gleichung im Frequenzbereich ist, kann man anhand des Auftretens von  $\omega$  oder  $k$  in der Gleichung, oder anhand der Abwesenheit zeitlicher Ableitungen.*

## 2.5 Helmholtzgleichung in höheren Dimensionen

In einem mehrdimensionalen Raum, sehen die Gleichungen des linearen Luftschalls beinahe identisch aus. Ein Schema für das differentielle Luftpaket in 2D ist in Abb. 6 zu sehen. Die Beziehungen sind alle drehmomentfrei.

Die zeitliche Zunahme des Druckes im differentiellen Volumenelement bezieht nun die örtliche Verkleinerungen der Schnelle in alle Dimensionen mit ein ( $\nabla^T = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \dots]$ )

$$\dot{p} = -K \left[ \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \dots \right] = -K \nabla^T \mathbf{v}, \quad \text{Kompressionsgleichung,} \quad (24)$$

und die Beeinflussung der örtlichen Druckänderung durch die Trägheit eines Volumenele-

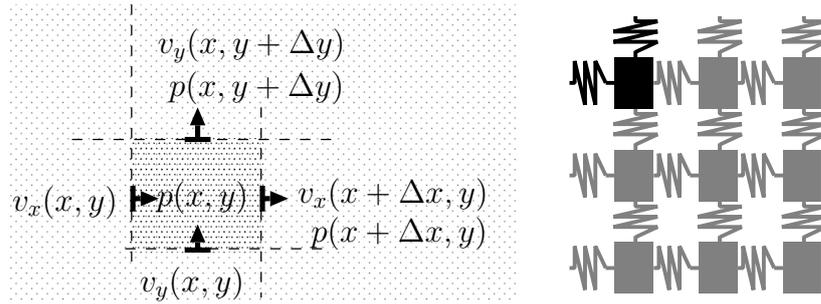


Abbildung 6 – Schema für ein differentielles 2D Luftelement.

mentes besitzt nun mehrdimensional unabhängige Richtungskomponenten

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} p = \nabla p = -\rho \dot{\mathbf{v}}, \quad \text{Eulergleichung.} \quad (25)$$

Komponentenweise ineinander eingesetzt ergibt sich im Fourierbereich die 2D Helmholtzgleichung (Laplace-operator  $\Delta = \nabla^T \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$ , und Wellenzahl  $k = \omega/c$ )

$$(\Delta + k^2) p = 0, \quad \text{Helmholtzgleichung.} \quad (26)$$

Die Helmholtzgleichung ist jene Gesetzmäßigkeit, nach welcher sich Schallwellen im freien Medium ausbreiten müssen. Anhand der Lösungen werden wir sehen, wie sich Schallausbreitung vorausberechnen lässt. Im ersten Anlauf ist sie leicht durch ebene Wellen zu lösen. Diese lassen sich zwar nicht mit endlichem physikalischen Aufwand im gesamten Raum erzeugen, sind aber sehr nützlich im eingeschränkten Raum.

### 2.5.1 Homogene Lösung: ebene Wellen

Wir ersetzen  $k = \frac{\omega}{c}$  und setzen exemplarisch für zwei Dimensionen einen Produktansatz mit Exponentialansätzen an  $p_h = e^{ik_x x} e^{ik_y y}$ .

Den Ansatz in Gl. (26) eingesetzt und wegdividiert ergibt die charakteristische Gleichung

$$-k_x^2 - k_y^2 = -k^2. \quad (27)$$

Darin werden  $k_x$  und  $k_y$  Wellenzahlen genannt.

Den Produktansatz beliebiger Dimension schreiben wir als

$$p_h = e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \dots = e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}, \quad (28)$$

mit den Koordinaten des Betrachtungspunkts als Ortsvektor  $\mathbf{r} = [x, y, \dots]^T$  und den Wellenzahlen als Wellenvektor  $\mathbf{k} = [k_x, k_y, \dots]^T$ . Die charakteristische Gleichung ist

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \dots = \mathbf{k}^T \mathbf{k} = k^2. \quad (29)$$

Der Wellenvektor liegt im sog. Wellenzahlraum (oder  $k$ -space [Wil99]). Die Wellengleichung lösende Wellenzahlen müssen die charakteristische Gleichung erfüllen.

**Gültige homogene Lösungen.** Mit diesem Hintergrundwissen können alle zulässigen homogenen Lösungen in kompakter Schreibweise angegeben werden, [Cap69]:

$$p_h = e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} \delta(\mathbf{k}^T \mathbf{k} - k^2). \quad (30)$$

Ein komplettes homogenes Schallfeld schreibt sich als gewichtete Überlagerung aller zulässigen homogenen Lösungen mit den Koeffizienten  $\psi(\mathbf{k})$ :

$$p(\mathbf{r}) = \int \psi(\mathbf{k}) \cdot \delta(\mathbf{k}^T \mathbf{k} - k^2) e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (31)$$

Das homogene Schallfeld ist also eine Fourier-Entwicklung bezüglich der drei Wellenzahlen. Der Wellenzahlraum darf im Allgemeinen komplexwertig sein  $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^D$ , und  $\psi(\mathbf{k})$  ist das *Wellenzahlspektrum* [Mös88] des Schalldruckes.

**Reeller Wellenzahlraum und ebene Wellen.** Zur Interpretation des Wellenzahlraumes nehmen wir vorerst rein reelle Anteile  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$  an. Laut Gl. (29) muss  $\mathbf{k}$  auf einer *Hyperkugel*<sup>5</sup> liegen. Folglich entspricht  $\mathbf{k}$  dem Richtungsvektor  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^D$  mit  $\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} = 1$  mal der Wellenzahl  $k$

$$\mathbf{k} = k \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (32)$$

Wird auch der Betrachtungspunkt angeschrieben als Richtungsvektor  $\boldsymbol{\theta}_r$  mal Abstand  $r$  vom Koordinatenursprung

$$\mathbf{r} = r \cdot \boldsymbol{\theta}_r, \quad (33)$$

so hängt die einzelne homogene Lösung nur vom Abstand  $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$  des Betrachtungspunktes zum Koordinatenursprung mal  $\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_r = \cos \vartheta$  des eingeschlossenen Winkels  $\vartheta$  zwischen Ortsvektor und ebene Welle ab:

$$p_h = e^{ikr \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_r} = e^{ikr \cos \vartheta}. \quad (34)$$

der Betrag  $|p_h| = 1$  ist offensichtlich überall 1. Bei einem eingeschlossenen Winkel von  $0^\circ$  ändert sich die Phase mit  $kr$ , während sie auf einer Ebene mit dem Winkel  $90^\circ$  konstant null ist. Jede Verschiebung des Koordinatenursprungs entlang der Richtung der ebenen Welle  $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} + \frac{\phi}{k} \boldsymbol{\theta}$  führt zu einer reinen Phasenverschiebung um  $\phi$

$$p_h = e^{ik \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{r} + \frac{\phi}{k} \boldsymbol{\theta})} = e^{ik \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r} + i\phi \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}} = e^{i\phi} e^{ik \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}}, \quad (35)$$

so wie auch die zeitliche Verschiebung das tun würde,  $e^{-i\omega \Delta t}$ .

Die Phasenfortschreitung  $k \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}$  entspricht der Projektion des Betrachtungspunktes  $\mathbf{r}$  auf das Radial  $\boldsymbol{\theta}(\varphi)$ , siehe Abb. 7. Nachdem negative Phase einer zeitlichen Verzögerung entspricht, zeigt der Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , bzw. der Richtungsvektor  $\boldsymbol{\theta}$  auf den Ursprung der ebenen Welle.

5. Die Hyper-Einheitskugel  $\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} = 1$  beschreibt in 1D ( $\theta_x^2 = 1$ ) die zwei Punkten  $\theta_x = \pm 1$ , in 2D ( $\theta_x^2 + \theta_y^2 = 1$ ) einen Einheitskreis,  $\theta_x = \cos \varphi$ ,  $\theta_y = \sin \varphi$  und in 3D  $\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 = 1$  einer Einheitskugel  $\theta_x = \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $\theta_y = \sin \varphi \sin \vartheta$ ,  $\theta_z = \cos \vartheta$ .

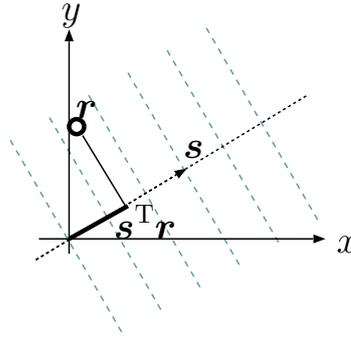


Abbildung 7 – Wie sich die Phasenlage einer ebenen Welle ergibt (Amplitude=1).

**Wellenvektor in 2D und 3D.** Folglich entspricht  $\mathbf{k}$  dem Richtungsvektor des Polarwinkels  $\varphi$  am Einheitskreis  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  mal der Wellenzahl  $k$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = k \cdot \boldsymbol{\theta} = k \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Ein homogenes Schallfeld setzt sich aus ebenen Wellen aus allen Polarwinkeln zusammen. Ist die Einschränkung des auf einen reellen Wellenzahlraum in 2D gültig, vereinfacht sich die Fourier-Erweiterung zu einem Pfadintegral auf dem Kreis

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2} \psi(\mathbf{k}) e^{ik\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}} d^2\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\mathbf{k}) e^{ik\boldsymbol{\theta}(\varphi)^T \mathbf{r}} d\varphi. \quad (37)$$

Im  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  entspricht  $\mathbf{k}$  dem Richtungsvektor der sphärischen Winkel,  $\varphi \dots$  Azimutwinkel,  $\vartheta \dots$  Zenitwinkel, auf der Einheitskugel  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , mal der Wellenzahl  $k$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = k \cdot \boldsymbol{\theta} = k \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Die Fourier-Erweiterung wird zu

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{k}) e^{ik\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}} d\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi(\mathbf{k}) e^{ik\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}} d\varphi \sin(\vartheta) d\vartheta. \quad (39)$$

So ein Schallfeld setzt sich der Annahme  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  entsprechend aus ebenen Wellen aus allen Richtungen  $\boldsymbol{\theta}$  zusammen.

Im Wellenzahlspektrum entspricht eine spektrale Dirac-Verteilung auf der Kugel  $k$  einer einzelnen ebenen Welle  $\boldsymbol{\theta}$

$$\psi(\mathbf{k}) = \delta(\|\mathbf{k} - k\boldsymbol{\theta}\|). \quad (40)$$

Eine einzelne ebene Welle ist aber auch eine *Fernfeldernäherung* eines Quellenfeldes und die Eulergl. (25)  $\nabla p = -\rho \dot{\mathbf{v}}$  gibt  $\boldsymbol{\nu}(k\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} \cdot \psi(k\boldsymbol{\theta})/\rho c$ :

*Im Fernfeld sind Druck und Schnelle jeder Quelle in Phase und hängen über die Schallkennimpedanz  $\rho c$  zusammen.*

### 2.5.2 Schallhart begrenzte Hohlräume: rechtwinkelige Räume

**Homogene Lösung für homogene Randbedingungen 1D.** Wählen wir für die 1D Wellengleichung  $(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2})p = 0$  zwei schallharte Abschlüsse  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  als Randbedingungen für die Stellen  $x = \{0, L\}$ , so muss für  $x = 0$  gelten:

$$\frac{\partial}{\partial y} p|_0 = ik(\psi_+ - \psi_-) = 0. \quad (41)$$

Dafür müssen hin- und rücklaufende Wellen gleich laut sein, z.B.  $\psi_- = \psi_+ = \frac{1}{2}$ :

$$p = \frac{1}{2}e^{-ikx} + \frac{1}{2}e^{+ikx} = \cos(kx). \quad (42)$$

Für die Stelle  $x = L$  haben wir die Forderung

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos(kx)|_L = -k \sin(kx) = 0, \quad (43)$$

es gibt also nur homogene Lösungen an den Wellenzahlen an denen der Sinus null wird,  $k = \frac{\pi}{L}l$ , mit  $l \in \mathbb{N}_0$ . Wir erhalten unabhängige homogenen Lösungen für  $l = 0, 1, 2, \dots$

$$p = A \cos\left(\frac{\pi}{L} l x\right), \quad (44)$$

die offensichtlich mit  $k = \omega/c = 2\pi f/c$  zu den Frequenzen  $f = \frac{cl}{2L}$  gehören. Es sind offenbar im schallhart eingeschlossenen Volumen nur diskrete Moden mit diskreten Frequenzen als homogene Lösungen der Helmholtzgleichung erlaubt.

**Homogene Lösung, homogene Randbedingungen 2D.** Um brauchbare Lösungen auszuwählen, müssen Bedingungen gestellt werden. Für eine rechteckige Begrenzung mit schallharten Flächen bei  $x = \{0, L_x\}$  und  $y = \{0, L_y\}$  muss die Schallschnelle normal zu den Bewandungen null werden  $v_x|_{x=0, L_x} = 0$ ,  $v_y|_{y=0, L_y} = 0$ . Da sie durch die Eulergleichung proportional ist zu den partiellen Ableitungen von  $p$ , sind diese Bedingungen äquivalent  $\frac{\partial}{\partial x} p|_{x=0, L_x} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} p|_{y=0, L_y} = 0$ .

Für den Produkt-Exponentialansatz  $p = p(x)p(y)$ ,  $p(x) = e^{-ik_x x}$ ,  $p(y) = e^{-ik_y y}$  liefert die Helmholtzgleichung die quadratische Bedingung  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Wieder muss die Superposition der Lösungen aller Vorzeichen  $\pm k_x$  und  $\pm k_y$  betrachtet werden:

$$p(x) = a e^{i k_x x} + b e^{-i k_x x}, \quad p(y) = c e^{i k_y y} + d e^{-i k_y y}. \quad (45)$$

Wie zuvor für das beidseitig schallhart abgeschlossene Rohr erfüllt sich die Randbedingung mit  $a = b = \frac{1}{2}$  und  $c = d = \frac{1}{2}$  und den diskreten, reellwertigen Wellenzahlen  $k_x = \frac{\pi}{L_x} l_x$  und  $k_y = \frac{\pi}{L_y} l_y$  mit  $l_x, l_y \in \mathbb{N}_0$ . Die gültige Lösung ist somit

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{L_x} l_x x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_y} l_y y\right), \quad (46)$$

und sie ist in Abb. 8 für einige Indizes  $l_x, l_y$  zu sehen. Weil die charakteristische Gleichung  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  und  $k = 2\pi f/c$  fordert, gibt es ausschließlich diskrete Frequenzen in der homogenen Lösung

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l_y}{L_y}\right)^2}, \quad (47)$$

allerdings nicht mehr harmonisch. Die Lösung ist daher definitiv nicht mehr periodisch in der Zeit, aus den eingeschränkten Frequenzen ist aber herauszulesen, dass es eine zeitliche Struktur gibt.

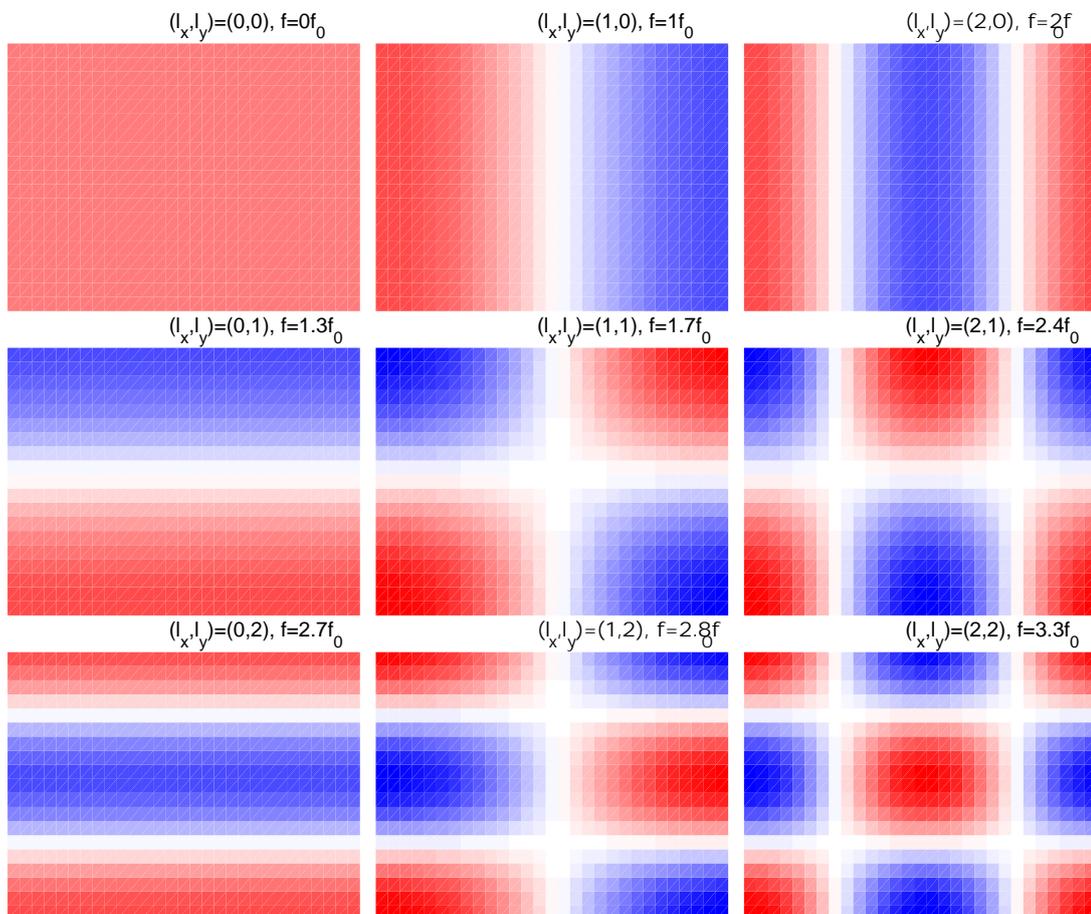


Abbildung 8 – Moden für den rechteckigen Raum in 2D mit schallharten Wänden.

**Homogene Lösung, homogene Randbedingungen 3D.** Eine ähnliche Lösung ergibt sich in 3 Dimensionen. Im Zeitbereich:

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{L_x} l_x x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_y} l_y y\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_z} l_z z\right) e^{i2\pi f [l_x, l_y, l_z] t}, \quad (48)$$

$$f[l_x, l_y, l_z] = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l_z}{L_z}\right)^2}.$$

**Inhomogene Lösung, homogene Randbedingungen:**

**D-dimensionalen Quaderraum** Für die inhomogene Wellengleichung in D Dimensionen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = -\delta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

mit schallharten Randbedingungen an den Stellen 0 und  $L_i$  in jeder kartesischen Koordinate,  $\frac{\partial}{\partial x_i} G|_{\{0, L_i\}} = 0$ ,  $\forall i = 0, \dots, D-1$ , kennen wir zumindest von oben die orthogonalen homogenen Lösung für den Ort, im Fourierbereich. Wir schreiben das um zu einer orthogonalen Lösungsbasis

$$\psi_j(\mathbf{r}) = \prod_{i=0}^{D-1} \cos\left(\frac{\pi}{L_i} l_i x_i\right) \sqrt{\frac{2 - \delta_{l_i}}{L_i}},$$

für das begrenzte Volumen,  $\int_V \psi_j(\mathbf{r}) \psi_{j'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{jj'}$ , und wir verwenden verkürzt den Modenindex  $j = j(l_0, \dots, l_{D-1})$ . Wir nehmen an, dass sich partikuläre Lösung  $G$  im Zeitbereich aus den mit  $\gamma_j(\omega)$  gewichteten Komponenten zusammensetzt

$$G = \int \sum_j \gamma \psi_j(\mathbf{r}) e^{i\omega t} d\omega.$$

Nach Einsetzen in die Wellengleichung ergibt sich wegen  $\Delta \psi_j(\mathbf{r}) = -\omega_j^2/c^2 \psi_j(\mathbf{r})$ ,  $\omega_j^2/c^2 = \sum_i \left(\frac{\pi}{L_i} l_i\right)^2$ , und  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$

$$\int \sum_j \frac{\gamma}{c^2} [\omega^2 - \omega_j^2] \psi_j(\mathbf{r}) e^{i\omega t} d\omega = -\delta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Transformation  $\psi_{j'}(\mathbf{r}) e^{-i\omega' t} d\mathbf{r} dt$  über Zeit und die räumlichen Intervalle  $[0, L_i]$  ergibt

$$\sum \int \frac{\gamma}{c^2} (\omega^2 - \omega_j^2) \underbrace{\left[ \int \psi_j(\mathbf{r}) \psi_{j'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]}_{\delta_{jj'}} \underbrace{\left[ \int e^{i(\omega - \omega') t} dt \right]}_{2\pi \delta(\omega - \omega')} d\omega = - \underbrace{\int \delta(t) e^{-i\omega' t} dt}_1 \underbrace{\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \psi_{j'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}_{\psi_{j'}(\mathbf{r}_0)}.$$

Hiermit zerfällt Summe und Integral, und der gesuchte Koeffizient ist partialbruchzerlegt

$$\gamma = -\frac{c^2}{2\pi} \frac{\psi_j(\mathbf{r}_0)}{\omega^2 - \omega_j^2} = -\frac{c^2 \psi_j(\mathbf{r}_0)}{4\pi \omega_j} \left[ \frac{1}{\omega - \omega_j} - \frac{1}{\omega + \omega_j} \right].$$

Damit ist  $G$  bestimmt, muss aber für eine kausale Lösung noch rücktransformiert werden:

$$G = - \sum_j \frac{c^2 \psi_j(\mathbf{r}_0) \psi_j(\mathbf{r})}{4\pi \omega_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_j} - \frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_j} \right] d\omega. \quad (49)$$

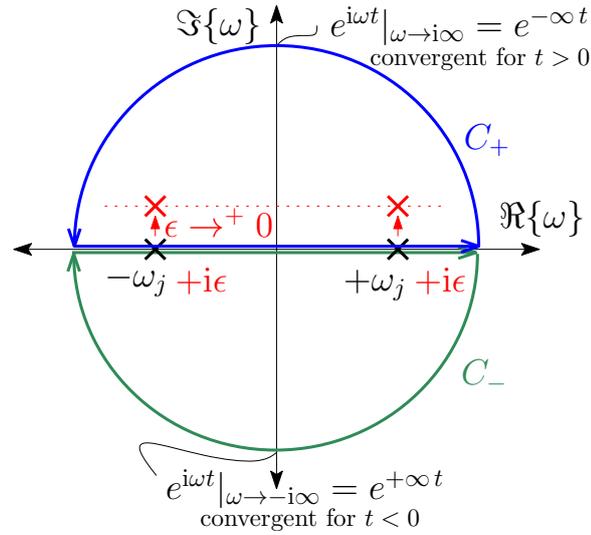


Abbildung 9 – Komplexes Konturintegral  $C_+$  für eine kausale Lösung bei  $t \geq 0$  mit der Regularisierung  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0}$  beider Polstellen zu  $\omega_{1,2} = \pm\omega_j + i\epsilon$ , und verschwindendes Konturintegral  $C_-$  für  $t < 0$ .

Dazu wird mit dem Lemma von Jordan gearbeitet<sup>6</sup>, siehe Abbildung 9: das uneigentliche Integral über  $\omega$  darf zu einem Kurvenintegral  $C$  ergänzt werden, das sich über einen unendlich großen Halbkreis in der komplexen  $\omega$ -Ebene schließt, sofern der Integrand verschwindet. Für den Integranden  $e^{i\omega t}$  darf der Halbkreis des Pfades  $C_+$  für positive Zeit über die positive Imaginärachse laufen, da er für  $\omega \rightarrow i\infty$  verschwindet. Entsprechend muss der Halbkreis des Pfades  $C_-$  (negative Zeit) über die negative Imaginärachse laufen.

Weder im Pfadintegral  $C_+$  noch  $C_-$  dürfen wir über die Unendlichkeitsstellen  $\pm\omega_j$  integrieren. Wir verschieben die Pole daher um ein kleines Stück ins Innere des Kurvenintegrals  $C_+$ . So ergibt die Cauchy'sche Integralformel  $\oint \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = 2\pi i f(\omega_0)$  zur Integration der analytischen Funktion  $f(\omega) = e^{i\omega t}$  um die Polstellen  $\pm\omega_0$  eine kausale Lösung, die bei negativer Zeit  $C_-$  verschwindet. Mit der Sprungfunktion  $u(t)$  notiert ist sie

$$\begin{aligned}
 G &= - \sum_j \frac{2\pi i c^2 \psi_j(\mathbf{r}_0) \psi_j(\mathbf{r})}{4\pi^2 \omega_j} u(t) \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [e^{(i\omega_j - \epsilon)t} - e^{(-i\omega_j - \epsilon)t}] \\
 &= c^2 \sum_j \psi_j(\mathbf{r}_0) \psi_j(\mathbf{r}) u(t) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{-\epsilon t} \\
 &= c^2 \sum_j \psi_j(\mathbf{r}_0) \psi_j(\mathbf{r}) u(t) \operatorname{sinc}(\omega_j t) t \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{-\epsilon t}. \tag{50}
 \end{aligned}$$

Eine Dämpfung  $\epsilon > 0$  simuliert endliche Nachhallzeit. Die Randbedingung wird stets genau eingehalten.

6. [http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172013000100004&script=sci\\_arttext](http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172013000100004&script=sci_arttext)

**Spiegelquellenmethode:** Im Anhang des Artikels von Allen und Berkley [AB79] wird die Spiegelquellenmethode (image source method) auch aus dieser Formel hergeleitet. Dazu gehen Allen und Berkeley einen anderen Weg.

Das Produkt aus den Kosinusfunktionen aller ganzzahligen Wellenzahlen entspricht einer spiegelperiodischen Serie aus Deltadistributionen im Ortsbereich.  $\sum_j \psi_j(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}_0) = \prod_{i=0}^{D-1} \sum_{m_i} \frac{\delta(x_i \mp x_{0i} + 2 m_{x_i} L_{x_i})}{2^D}$ . Der Multiplikations-/Faltungssatz ermöglicht die Interpretation, dass die diskreten Wellenzahlen erst durch die Multiplikation eines kontinuierlichen Wellenzahlspektrums mit einem Kamm aus Deltadistributionen an diskreten Wellenzahl zustande kommt. Der Rechnung von Allen und Berkley nach muss die örtliche Lösung eine spiegelperiodische Verschiebung einer einzigen Lösung für das Freifeld sein:

$$G = G_{DD}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \star \prod_{i=0}^{D-1} \sum_{m_i} \frac{\delta(x_i \mp x_{0i} + 2 m_{x_i} L_{x_i})}{2^D}. \quad (51)$$

Ohne analytische Berechnung ist die Spiegelquellenmethode wenig überraschend: eine Spiegelung einer Quelle an einer Koordinate bewirkt ein an dieser Koordinate symmetrisches Feld. Dadurch ist die Ableitung in die Spiegelungsrichtung und eine schallharte Randbedingung erfüllt. Um weitere schallharte Randbedingungen an einer dazu parallelen Stelle zu erfüllen, wäre eine Spiegelung an dieser Stelle denkbar. Die zerstört aber die erste Randbedingung. An den parallelen Randbedingungen müssen unendlich viele Hin- und Herspiegelungen erfolgen, damit beide Randbedingungen gleichzeitig erfüllt werden.

In Implementierungen der Formeln mit endlichem Aufwand tritt der wesentliche Unterschied der modalen Lösung und der Spiegelquellenlösung zum Vorschein: Eine endliche Summation deckt in der modalen Formulierung einen Bereich endlich vieler Resonanzen ab, wobei die endliche Summation der Spiegelquellenmethode eine endlichen Zeitbereich abdeckt. Im Grenzübergang nach Unendlich wären beide Formulierungen äquivalent. Die Summation endlich vieler Resonanzen hat allerdings einen gewichtigen Genauigkeitsnachteil: Resonanzen sind im Frequenzbereich abseits ihres Spitzenwertes nicht eng lokalisiert.

Für eine Untersuchung dieser Zusammenhänge, vor allem in Bezug auf Quellen und Empfänger mit Richtwirkung, sind diese beiden Arbeiten interessant [PDV13, Sta14].

### 2.5.3 Green'sche Funktion im Freifeld

Als Prototyp für inhomogene Probleme  $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})p = -q$  wird oftmals die Green'sche Funktion, deren Definition

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G = -\delta$$

wir bereits kennen, verwendet. Weil die Anregung  $q$  bei Faltung mit der Deltadistribution gleich bleibt  $\int q(\mathbf{s}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) dV(\mathbf{s}) = q(\mathbf{r})$  und die Wellengleichung linear ist, ist die Lösung eine Faltung der Green'schen Funktion mit der Anregung  $p(\mathbf{r}) = \int q(\mathbf{s}) G(\mathbf{r} - \mathbf{s}) dV(\mathbf{s})$  und jener über die Zeit. Das Integral setzt die akustischen Antworten für jeden einzelnen Orts- und Zeitpunkt der Anregung linear zusammen.

Die komplexen Exponentialfunktionen des Ortes,  $e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}$ , sind gültige homogene Lösungen sofern  $\mathbf{k}^T \mathbf{k} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ . Wie in den Beispielen zur kontinuierlichen Feder setzen wir, ohne diese Bedingung, die inhomogene, partikuläre Lösung aus zeitlichen und örtlichen Exponentialfunktionen und einem Koeffizienten  $\gamma$  zusammen:

$$G = \iint \gamma e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t} d\omega d\mathbf{k} \quad (52)$$

Eingesetzt in die inhomogene Wellengleichung ergibt sich wegen  $\Delta e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} = (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - \dots) e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} = -k^2 e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}$  und wegen  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$

$$-\iint \gamma \left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}} e^{i\omega t} d\omega d\mathbf{k} = -\delta(t) \delta(\mathbf{r}).$$

Mehrfachtransformation  $e^{-i\hat{\mathbf{k}}^T \mathbf{r}} e^{-i\hat{\omega} t} d\mathbf{r} dt$  zerschlägt das Integral auch im Mehrdimensionalen

$$-\iint \gamma \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underbrace{\left[ \int e^{i(\mathbf{k} - \hat{\mathbf{k}})^T \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right]}_{(2\pi)^D \delta(\mathbf{k} - \hat{\mathbf{k}})} \underbrace{\left[ \int e^{i(\omega - \hat{\omega}) t} dt \right]}_{2\pi \delta(\omega - \hat{\omega})} d\omega d\mathbf{k} = - \underbrace{\int \delta(t) e^{-i\hat{\omega} t} dt}_1 \underbrace{\int \delta(\mathbf{r}) e^{-i\hat{\mathbf{k}}^T \mathbf{r}} d\mathbf{r}}_1,$$

und der gesuchte Koeffizient ist  $\gamma = \frac{1}{(2\pi)^{D+1}} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ . Belassen wir  $G$  im Frequenzbereich, entfällt ein  $\frac{1}{2\pi}$  in  $\gamma$  und das Integral  $e^{i\omega t} d\omega$ . Wir transformieren  $\gamma$  nur über  $\mathbf{k}$  zurück

$$G = \frac{1}{(2\pi)^D} \iint \frac{e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^D} \iint \frac{e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\mathbf{k}.$$

Durch die Umformung  $\mathbf{k}^T \mathbf{r} = kr \boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\theta}_r = kr \cos \vartheta = kr \mu$  sehen wir, dass sich die Integration vereinfacht. Wir wissen nun schon formal, dass die Green'sche Funktion nach Rückintegration nur vom Abstand  $r$  zwischen Quell- und Empfangspunkt abhängen kann  $G = G(\omega, r)$ .

Im Buch [Duf01, S.110-112] findet sich eine nennenswerte, kompakte Herleitung über diesen Weg für  $D = 3$ , die hier ausgeführt wird; siehe auch Appendix D für eine allgemeine Dimensionszahl.

**Herleitung für D=3 über die Fourier-Rücktransformation:** Für  $D = 3$  lässt sich das Rücktransmutationsintegral ähnlich einfach wie für  $D = 1$ , siehe Gl. (19), lösen. Zuvor erkennen wir, dass die oben vorgenommene Ersetzung  $\mathbf{k}^T \mathbf{r}$  durch  $kr \cos \vartheta$  den Radius des Wellenzahlvektors  $k = \|\mathbf{k}\|$  und den Cosinus des eingeschlossenen Winkels zwischen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{k}$  beinhaltet. Im Wellenzahlraum lässt sich für jedes  $\mathbf{r}$  immer ein entsprechend orientiertes Kugelkoordinatensystem definieren, wodurch sich die Integration vereinfacht zu  $\iiint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} k^2 dk d\varphi d\cos\vartheta = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 k^2 dk d\varphi d\mu$ . Wir berechnen nach Umsortierung der Integrale

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{\int_{-1}^1 e^{ikr\mu} d\mu}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k^2 dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{ikr} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k^2 dk \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk - \int_0^{-\infty} \frac{e^{-i(-k)r} (-k)}{(-k)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d(-k) \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ikr} k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} k dk. \tag{53}
\end{aligned}$$

Das verbleibende uneigentliche Integral wird durch das Lemma von Jordan nach der Partialbruchzerlegung  $\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{1}{2k} \frac{1}{k - \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{2k} \frac{1}{k + \frac{\omega}{c}}$  und der Regularisierung für Kausalität gelöst

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2ir} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \oint_{C_+} \frac{e^{ikr}}{k - \frac{\omega - i\epsilon}{c}} dk + \oint_{C_+} \frac{e^{ikr}}{k + \frac{\omega - i\epsilon}{c}} dk \right] \\
&= \frac{2\pi}{(2\pi)^2} \frac{i}{2ir} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{-ikr - \frac{\epsilon}{c}r} = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \tag{54}
\end{aligned}$$

**Green'sche Funktion bei allgemeiner Dimensionszahl:** Im Appendix C wird gezeigt, wie man über ein richtungsunabhängiges Koordinatensystem zu Green'schen Funktionen allgemeiner Dimensionszahl kommt, vgl. [Som92]. Im Fernfeld ist die Green'sche Funktion stets proportional zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G = a \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}^{D-1}}. \quad (\text{bei } D = 1 \text{ und } D = 3 \text{ sogar exakt bei kleinem Radius}). \tag{55}$$

Die exakte Form der Green'schen Funktion ist bei allgemeiner Dimensionszahl

$$G = \frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}^{D-2} H_{\frac{D-2}{2}}^{(2)}(kr). \tag{56}$$

Mit den einfachen Sonderfällen für  $D = 1, 3$  ergeben sich daraus für Green'sche Funktion des Freifeldes folgende Definitionen:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] G_{1D}(r) = -\delta_{1D}(r), \quad \Rightarrow G_{1D} = \frac{e^{-ikr}}{2ik}, \quad (57)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] G_{2D}(r) = -\delta_{2D}(r), \quad \Rightarrow G_{2D} = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr), \quad (58)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] G_{3D}(r) = -\delta_{3D}(r), \quad \Rightarrow G_{3D} = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \quad (59)$$

**Was haben ebenen Wellen mit einer Fernfeldnäherung mit zu tun?** Die Radiuskoordinate der Green'schen Funktion entsteht aus dem Abstand zweier kartesischer Vektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$ , wovon eine den Aufpunkt und die andere den Quellpunkt beschreibt. Wird eine davon sehr groß, wir schreiben diese als Produkt von Länge und Richtungsvektor  $\mathbf{r}_1 = r_1 \boldsymbol{\theta}$ , so können wir vereinfachen

$$\begin{aligned} \lim_{r_1 \rightarrow \infty} r &= \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \sqrt{(r_1 \boldsymbol{\theta} - \mathbf{r}_2)^T (r_1 \boldsymbol{\theta} - \mathbf{r}_2)} = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \sqrt{r_1^2 - 2r_1 \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}_2 + r_2^2} \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow \infty} r_1 \sqrt{1 - \frac{2\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}_2}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_1^2}} \stackrel{\substack{\sqrt{1-2x} \\ \rightarrow 1-x}}{}}{=} r_1 - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (60)$$

Zur *Phasenapproximation* ist beispielsweise bei einer Wellenlänge von 30 cm ein kleiner Distanzunterschied zwischen 15 m und 15 m+15 cm noch entscheidend: er ändert das Vorzeichen der Welle. Daher müssen wir für den Phasenverlauf der Green'schen Funktion zumindest die obige Formel  $r_1 - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}_2$  verwenden. Hingegen, die *Amplitudenapproximation* leidet wenig, wenn wir anstelle von  $\frac{1}{\sqrt{15\text{ m} + 15\text{ cm}}^{D-1}}$  die kleine Distanzänderung vernachlässigen  $\frac{1}{\sqrt{15\text{ m}}^{D-1}}$ . Bei großem Abstand  $r_1$ , nehmen wir an  $r_1$  sei konstant, ist daher die Green'sche Funktion proportional zur ebenen Welle aus der entsprechenden Richtung  $\boldsymbol{\theta}$

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} G \propto e^{ik\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}_2}. \quad (61)$$

### 3 Theoretische Holografie und Holofonie

Dieser Abschnitt beschreibt die theoretischen Überlegungen hinter der akustischen Schallfeldholografie und -holofonie.

Grundlage davon ist das Kirchhoff-Helmholtz-Integral (KHI). Es entstand aus dem unabhängigen Bestreben von Hermann von Helmholtz (1860) und Gustav Robert Kirchhoff (1883), die neue analytische Methode der dritten Integralidentität für die Laplace/Poisson-Gleichung aus George Green's Aufsatz (1828) in eine Anwendung auf die lineare, verlustlose Wellengleichung überzuführen. Dabei entdeckten die beiden Forscher die Formel für das Huygens'sche Prinzip [Huy90], das sich länger als 100 Jahre mathematisch nur ungeschickt formulieren ließ [BC39, Jes73].

Um das nachvollziehen zu können, erfahren wir zuerst ein wenig über den Divergenzsatz für Vektorfelder, die Definition der Green'schen Funktion in der Potentialtheorie (Laplace-/Poisson-Gleichung) und letztlich die geschickte Formulierung der dritten Green'schen Identität, sowie ihre Überführung auf die Wellengleichung.

**Divergenzsatz für Vektorfelder (Gauß'scher Integralsatz).** Zur Bestimmung der Quellstärke in vektoriiellen Feldern (z.B. Erdschwerefeld) eignen sich zwei Integrale.

Sei  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = [a_x(\mathbf{r}), a_y(\mathbf{r}), a_z(\mathbf{r})]^T$  ein Feld, das in dem jedem Punkt  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  einen Vektor  $\mathbf{a}$  ergibt. Es gilt der Satz:

$$Q = \oint_{\partial V} \mathbf{a}(\mathbf{r})^T d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla^T \mathbf{a}(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}). \quad (62)$$

Demnach ist die bekannte Formel für die Quellstärke  $Q$  innerhalb des Volumens  $V$  das Oberflächenintegral, das den gesamten Feldlinienfluss bilanziert, der senkrecht aus der Hüllfläche austritt. Träten alle Feldlinien bloß durch das Volumen durch, wäre  $Q = 0$ . Das Integrationselement ist  $d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = dS(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r})$ , darin ist  $dS(\mathbf{r})$  ein Flächenelement und  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  sein nach außen weisender Einheitsnormalvektor. Die Bilanz des Hüllflussintegrals liefert das selbe Ergebnis, als würde man das Volumen zerteilen und die Hüllflussintegrale aller Einzelteile summieren. Im Grenzübergang zu unendlich vielen, infinitesimal kleinen Unterteilungen lässt sich das Hüllflussintegral um einen Punkt durch die Divergenz  $\nabla^T \mathbf{a}(\mathbf{r})$  berechnen, siehe Herleitung im Appendix F. Durch diesen Zusammenhang kann die Quellstärke auch aus dem Volumsintegral über die Divergenz berechnet werden. Der Operator Nabla  $\nabla^T = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$  ist ein Vektor aus kartesischen Ableitungen.

**Potentialtheorie.** Obwohl viele physikalische Felder Vektorfelder sind, wurde mit der Potentialtheorie eine grundlegende Neuerung eingeführt: konservative, wirbelfreie Vektorfelder als Gradienten eines skalaren Potentialfeldes  $u(\mathbf{r})$  darzustellen zu können,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \nabla u(\mathbf{r}), \quad (63)$$

was viele Berechnungen vereinfacht. Dabei ist der Gradient der oben vorgestellte Vektor partieller Ableitungen (hier als Spaltenvektor). Physikalisch gilt das im konservativen

Kräftefeld, in dem die Potentialdifferenz  $u(\mathbf{a}) - u(\mathbf{b})$  proportional zur Arbeit ist, die unabhängig vom Weg<sup>7</sup> benötigt wird, um eine Einheitsmasse von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  zu bringen:

$$W = [u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a})] = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (64)$$

Potentialfelder der Elektrostatik genügen der Laplace/Poisson-Gleichung, also Differentialgleichungen

$$\text{ohne Anregung} \quad \Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{mit Anregung} \quad \Delta u(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}). \quad (65)$$

**Green'sche Funktion.** George Green [Gre28] brachte 1828 einen Artikel im Eigenverlag heraus, in bescheidener Hoffnung, brauchbare Integralformeln für die Potentialtheorie beizusteuern. Ein ganz neues Konzept war, die Lösung der Laplace/Poisson Gleichung auf eine verschwindend kleine Anregung als Funktion zu definieren. Heute nennen wir  $G$ ,

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}), \quad (66)$$

die *Green'sche Funktion* und verwenden das Dirac-Delta-Symbol zur Kompaktschreibweise (hier in 3D) der normierten, punktförmigen Anregung,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & \text{für } \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\| < \epsilon, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (67)$$

Beim Integrieren dieser Distribution über ein Volumen  $V$  erhalten wir je nach Lage von  $\mathbf{s}$  im Volumen, auf seinem Rand  $\partial V$ , oder dem disjunkten Volumen  $\bar{V}$ ,  $V \cup \partial V \cup \bar{V} = \mathbb{R}^D$ :

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \, dV(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathbf{r} \in V, \\ 1/2, & \text{wenn } \mathbf{r} \in \partial V, \\ 0, & \text{wenn } \mathbf{r} \in \bar{V}. \end{cases} \quad (68)$$

Der zweite Wert entsteht, weil nur eine Hälfte der unendlich kleinen Anregung, eine Halbkugel, innerhalb von  $V$  zu liegen kommt.

**Zweite/Dritte Green'sche Identität.** Im selben Beitrag gab Green 1828 [Gre28] einige Integralformeln an. Eine setzt in das Divergenztheorem eine spielerisch zusammengesetzte Gleichung aus zwei Feldern  $G$  und  $p$  ein

$$\mathbf{u} = p \nabla G - G \nabla p, \quad (69)$$

und ergibt die zweite Green'sche Identität mit  $\nabla^T p \nabla G + p \nabla^T \nabla G - \nabla^T G \nabla p - G \nabla^T \nabla p$

$$\oint_{\partial V} [p \nabla G - G \nabla p]^T \, d\mathbf{S} = \int_V [p \Delta G - G \Delta p] \, dV. \quad (70)$$

7. Das ist eine Eigenschaft analog zur Analytizität von Funktionen, die auf der komplexen Zahlenebene definiert sind. *Anm.:* Polstellen auf  $\mathbb{C}$  ausgewertet entsprechen zweidimensionalen Wirbelfeldern.

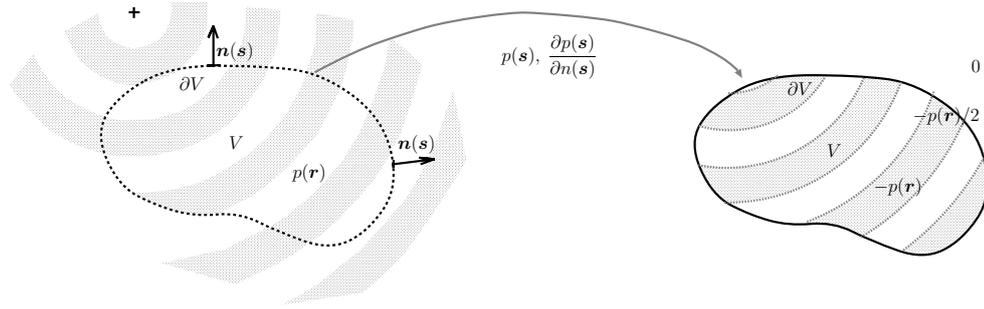


Abbildung 10 – Mit Randwerten  $p(\mathbf{s})$  und  $\frac{\partial p(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})}$  am Rand von  $\partial V$  eines homogenen (anregungs- und hindernisfreien) Feldes, ergibt das Kirchhoff-Helmholtz-Integral  $-p(\mathbf{r})$  innerhalb von  $V$ ,  $p(\mathbf{r})/2$  am Rand  $\partial V$  und 0 sonst.

Wird angenommen, dass  $p$  die Laplacegleichung  $\Delta p = 0$  erfüllt und  $G$  eine Green'sche Funktion  $\Delta G = -\delta$  ist, vereinfacht sich die rechte Seite zur dritten Green'schen Identität

$$\oint_{\partial V} [p(\mathbf{s}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) - G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \nabla p(\mathbf{s})]^T d\mathbf{S}(\mathbf{s}) = \begin{cases} -p(\mathbf{r}), & \text{für } \mathbf{r} \in V, \\ -p(\mathbf{r})/2, & \text{für } \mathbf{r} \in \partial V, \\ 0, & \text{für } \mathbf{r} \in \bar{V}. \end{cases} \quad (71)$$

Die Bedeutung der Formel ist enorm: wir können das skalare Potential  $p(\mathbf{r})$  der Laplace/Poissongleichung (z.B. in der Elektrostatik) innerhalb eines homogenen Volumens  $V$  vollständig darstellen, indem wir seine Randwerte kennen und in das Integral einsetzen.

*Gelingt das auch akustisch, also bei Schallfeldern statt Potentialfeldern?*

### 3.1 Kirchhoff-Helmholtz Integral (KHI)

Helmholtz [vH60] und Kirchhoff [Kir83] haben den selben Vorgang auf die lineare verlustlose Wellengleichung übertragen. So wird nun  $p$  und  $G$  definiert über die Gleichungen

$$(\Delta + k^2)p = 0, \quad (\Delta + k^2)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}), \quad (72)$$

wobei  $k$  die Wellenzahl  $\omega/c$  ist. Wir erhalten aus der zweiten Green'schen Identität Gl. (70) unter Ersetzung der Definition der Symbole  $p$  und  $G$  sofort das Kirchhoff-Helmholtzintegral (KHI), siehe Abb. 12. Unterm Volumsintegral bleiben selbst unter der neuen Definition die selben Formelzeichen übrig wie in der dritten Green'schen Identität, weil  $p\Delta G - G\Delta p = p(-\delta - k^2G) - G(-k^2p) = -p\delta$ , vgl. Gl. (71),

$$\oint_{\mathbf{s} \in \partial V} \left[ p(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} - G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial p(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{S}(\mathbf{s}) = \begin{cases} -p(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V, \\ -p(\mathbf{r})/2, & \mathbf{r} \in \partial V, \\ 0, & \mathbf{r} \in \bar{V}. \end{cases} \quad (73)$$

Die Tragweite des KHI ist mächtig: das KHI stellt homogene akustische Felder (umgekehrten Vorzeichens) alleine aufgrund ihrer Randwerte  $p(\mathbf{s})$  und  $\frac{\partial p(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})}$  innerhalb des Volumens  $V$  äquivalent dar.

### 3.1.1 Das KHI als idealer Schallschlucker

Nehmen wir ein einfallendes Schallfeld  $p_{\text{in}}$  an, z.B. von einer 10m entfernten Punktquelle. Nun überlagern wir diesem Schallfeld  $p_{\text{in}}(\mathbf{r})$  ein KHI, das wir mit den vorgefundenen Werten  $p_{\text{in}}(\mathbf{s})$  und  $\frac{\partial p_{\text{in}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})}$  betreiben. Wir bekommen, vgl. Gl. (73),

$$p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \oint_{\mathbf{s} \in \partial V} \left[ p_{\text{in}}(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} - G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial p_{\text{in}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} \right] dS(\mathbf{s}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in V, \\ p_{\text{in}}(\mathbf{r})/2, & \mathbf{r} \in \partial V, \\ p_{\text{in}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \bar{V}. \end{cases} \quad (74)$$

**Endlich:** Ein interessantes Ergebnis: offenbar erzeugt das KHI mit Randwerten vorgefundener Schalldrücke und ihrer Normalableitungen ein entgegengesetztes Feld im endlich großen Volumen  $V$ , das eine völlige Ruhezone bewirkt  $p = 0$ . Das Quellenfeld im unendlichen Außenvolumen  $\bar{V}$  bleibt unbeeinflusst. Entscheidend für die Auslöschung in  $V$  ist, dass die Richtungsableitungen  $\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{s})}$  (vorzeichenbestimmend!) ins Quellgebiet  $\bar{V}$  zeigen.

**Unendlich:** Wir können das KHI selbst dann anwenden, wenn anstelle des Quellvolumens das quellfreie Volumen unendliche Größe besitzt. Die Festlegung des Synthesevolumens (entsprechendes Volumsintegral) fällt wegen geltender Voraussetzungen implizit auf das quellfreie Volumen  $V$ . Allerdings gilt wie zuvor: eine Ruhezone in  $V$  entsteht nur dann, wenn die vorzeichenbestimmenden Richtungsableitungen  $\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{s})}$  ins Quellgebiet  $\bar{V}$  weisen.

*:-) kleiner Tipp: Daher nicht vergessen, das KHI vor dem Betreten eines Orts unangenehmer Lautstärke einzupacken. In der Anwendung kinderleicht: rechtzeitig für alle aufspannen, oder von links anwenden und die akustische Störung darin verstauen! (-:*

Die Arbeiten von Maurice Jessel [Jes73] und seine Patente versuchten tatsächlich, mit Kugeln- und Achtermikrofonen, sowie Monopol- und Dipollautsprechern aktive Wandabsorber zu bauen. Leider gelang das mit verfügbarer Technologie nur in stark eingeschränktem Frequenzbereich.

### 3.1.2 Das KHI zur Berechnung von Beugung/Streuung/Reflexion

Platziert man Körper mit fester Oberfläche in vorhandene Schallfelder, so kommt es an diesen Körpern zur Reflexion, Beugung und Zerstreuung auftreffenden Schalls.

Mathematisch werden solche Streukörper am allgemeinsten über das KHI beschrieben. Dabei muss sich der Schalldruck außerhalb des Streukörpers aus zwei Feldern zusammensetzen:  $p = p_{\text{in}} + p_{\text{sc}}$ , der vorher bereits vorhandenen Einstrahlung  $p_{\text{in}}$ , zu deren Beschreibung es das KHI nicht braucht, und den Anteil  $p_{\text{sc}}$  der mit dem KHI den Rückwurf des eingebrachten Körpers als homogenes Feld außerhalb darstellt.

Als Randbedingung für eine feste Oberfläche muss gelten, dass die Normalschnelle auf den Körper null werden muss. Durch ihre Proportionalität zur Normalableitung des Druckes gilt zugleich  $\frac{\partial p_{\text{in}}(\mathbf{s}) + \partial p_{\text{sc}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} = 0$ . Damit entfällt im Oberflächenintegral des KHI der Term

mit den Green'schen Funktion, und es bleibt:

$$-p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \oint_{\mathbf{s} \in \partial V} [p_{\text{in}}(\mathbf{s}) + p_{\text{sc}}(\mathbf{s})] \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} dS(\mathbf{s}) = \begin{cases} -[p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + p_{\text{sc}}(\mathbf{r})], & \mathbf{r} \in V, \\ -\frac{p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + p_{\text{sc}}(\mathbf{r})}{2}, & \mathbf{r} \in \partial V, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V. \end{cases} \quad (75)$$

Davon ist das einfallende Feld bekannt, und das ausstrahlende Feld, oder zumindest der Randwert  $p_{\text{sc}}(\mathbf{s})$ , durch den es beschrieben ist, muss dazu erst aus der Integralgleichung berechnet werden.

Die Randelementemethode (BEM, boundary element method, [Juh93]) zerstückelt das Integral, z.B. in kleine Dreiecksintegrale, und wertet den Schalldruck einer über das Flächenstück integrierte Dipolquelle/Monopolquelle auf jedem Flächenstück aus („Kollokationsmethode“). Aus dieser Diskretisierung ergibt sich dann ein als Matrixgleichung lösbares Problem, wobei  $\mathbf{H} = [\int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{s}, \mathbf{r}_j) dS_i(\mathbf{s})]_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} -\mathbf{p}_{\text{in}} + \mathbf{H}(\mathbf{p}_{\text{in}} + \mathbf{p}_{\text{sc}}) &= -(\mathbf{p}_{\text{in}} + \mathbf{p}_{\text{sc}})/2 \\ (\mathbf{I}/2 + \mathbf{H})\mathbf{p}_{\text{sc}} &= (\mathbf{I}/2 - \mathbf{H})\mathbf{p}_{\text{in}} \\ \mathbf{p}_{\text{sc}} &= (\mathbf{I}/2 + \mathbf{H})^{-1}(\mathbf{I}/2 - \mathbf{H})\mathbf{p}_{\text{in}}. \end{aligned}$$

### 3.1.3 Die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

Das Kirchhoff-Helmholtzintegral schließt das homogene Schallfeld ein. Es ist bei ausstrahlenden Feldern erlaubt, um das Quellphänomen zwei Integrale ineinander zu schreiben, eines um die Quelle herum, und eines weiter draußen. Wir nehmen einen kleinen Radius  $r_0$  an, der die Quellen eingrenzt, und einen zweiten großen Radius  $r_\infty$

$$p = \int_{r_0} (G \frac{\partial}{\partial n} p - p \frac{\partial}{\partial n} G) dS_0 + \int_{r_\infty} (G \frac{\partial}{\partial n} p - p \frac{\partial}{\partial n} G) dS_\infty. \quad (76)$$

Wird gewünscht, dass vom zweiten Integral kein Feld einläuft, muss es null werden. Bei ganz allgemeiner Anzahl an Dimensionen  $D$  (wir haben ja typischerweise 3), ist die Proportionalität der Green'schen Funktion im Fernfeld  $\lim_{r \rightarrow \infty} G = \alpha r^{-\frac{D-1}{2}} e^{-ikr}$  und ihrer Ableitung  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial r} G \approx (-ik - \frac{D-1}{2r}) \alpha r^{-\frac{D-1}{2}} e^{-ikr}$ . Durch diese Berechnung ergibt sich die wichtige Ausstrahlungsbedingung von Sommerfeld, die nun nicht nur für  $G$ , sondern auch für  $p$  in  $D$  Dimensionen gelten soll:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{D-1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p = 0. \quad (77)$$

Diese Bedingung ist von ganz zentraler Bedeutung für physikalische örtlich begrenzte Vorgänge endlicher Energie. Sie wird von ebenen Wellen oder Stehwellen nicht erfüllt.

Die Bedingung bewirkt, dass die radiale Schallintensität  $I_r = p v_r^*$  mit  $\frac{\partial}{\partial r} p = -i\omega \rho v_r$  rein reell ist und nach außen zeigt,  $I_r = p \left[ \frac{1}{i\omega(-\rho)} \frac{\partial}{\partial r} p \right]^* = p \left[ \frac{-ikp}{i\omega(-\rho)} \right]^* = \frac{|p|^2}{\rho c}$ . Damit ist sichergestellt, dass die Schallleistung im unendlichen Medium verbraucht wird.

### 3.2 Theoretische Holofonie mit dem Einschichtpotential

Für die theoretische Schallfeldwiederherstellung nach Fazi [Faz10] wird ein *äquivalentes Beugungsproblem* angenommen. Dieser praktische Trick setzt den Schalldruck aus Primärfeld  $p_{\text{in}}$  und gestreutem Schalldruck  $p_{\text{sc}}$  an der Oberfläche  $\partial V$  eines *ideal schallweichen Beugungskörpers* zu null  $(p_{\text{sc}} + p_{\text{in}})|_{\partial V} = 0$  zusammen. Wir entledigen uns damit der Dipolquellen des KHI. Das tun wir vor allem deshalb, weil Lautsprecher am leichtesten in omnidirektionaler Charakteristik gebaut werden können. Trotz aller Abweichung zu diesem Ideal bietet die verbleibende Integralgleichung (single-layer potential / Einschichtpotential, simple-source approach) eine gute theoretische Basis zur Schallfeldsynthese.

**Schallfeldsynthese im endlichen Volumen  $\bar{V}$ :** Sei  $V$  das unendliche Äußere eines schallweichen Beugungskörpers,  $\partial V$  der Rand und  $\bar{V}$  sein endlich großes Inneres, so gilt

$$-p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \oint_{s \in \partial V} \underbrace{\left[ \frac{\partial p_{\text{in}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} + \frac{\partial p_{\text{sc}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} \right]}_{:=g(\mathbf{s})} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) dS(\mathbf{s}) = \begin{cases} -[p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + p_{\text{sc}}(\mathbf{r})], & \mathbf{r} \in V, \\ -\frac{p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + p_{\text{sc}}(\mathbf{r})}{2}, & \mathbf{r} \in \partial V, \\ 0, & \mathbf{r} \in \bar{V}. \end{cases}$$

Beidseitige Addition von  $p_{\text{in}}$  ergibt eine Integralgleichung mit 3 Fällen:

$$\oint_{s \in \partial V} g(\mathbf{s}) G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) dS(\mathbf{s}) = \begin{cases} -p_{\text{sc}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V \quad \text{Fall 1,} \\ p_{\text{in}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial V \quad \text{Fall 2,} \\ p_{\text{in}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \bar{V} \quad \text{Fall 3.} \end{cases} \quad (78)$$

Das einfallende Feld  $p_{\text{in}}(\mathbf{r})$  ist überall bekannt. Die Herausforderung der Schallfeldsynthese liegt offenbar in der Bestimmung der Ansteuerungsfunktion  $g(\mathbf{s})$  (*Einschichtpotential*). Der Fall 1 ist dazu wenig hilfreich, weil wir  $p_{\text{sc}}$  nicht kennen. Nun erscheint sinnvoll, Fall 2 zu betrachten, da sowohl Einschichtpotential als auch das Ergebnis über die selbe Menge  $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \partial V$  ausgewertet werden.

Wie in den Arbeiten [FN12, ZS13] diskutiert, ergeben sich dabei Eindeutigkeitsprobleme, wenn an der betrachteten Frequenz Moden  $p_l^{\text{res}}(\mathbf{r})$  innerhalb des schallweich begrenzten Volumens  $\bar{V}$  existieren. Für sie degeneriert das an  $\partial V$  ausgewertete Integral, trotz  $\frac{\partial p_l^{\text{res}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} \neq 0$ :

$$\oint_{s \in \partial V} \frac{\partial p_l^{\text{res}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) dS(\mathbf{s}) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \partial V. \quad (79)$$

Existieren solche Moden, können diese nach Belieben zu  $g(\mathbf{s})$  hinzugefügt werden, ohne das Ergebnis im Fall 1 und 2 zu verändern:

$$\oint_{\partial V} \left[ g(\mathbf{s}) + \alpha_l \frac{\partial p_l^{\text{res}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) dS(\mathbf{s}) = \begin{cases} -p_{\text{sc}}(\mathbf{r}) + 0, & \mathbf{r} \in V \quad \text{Fall 1,} \\ p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + 0, & \mathbf{r} \in \partial V \quad \text{Fall 2,} \\ p_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \alpha_l p_l^{\text{res}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \bar{V} \quad \text{Fall 3.} \end{cases}$$

Ganz konkret bleibt Fall 1 des KHI an  $\partial V$  unbeeinflusst, weil derartige Moden (Stehwellen) außerhalb des Beugungskörpers nicht durch endliche Quellenanordnungen an  $\partial V$  erzeugen lassen: Stehwellen erfüllen in  $V$  nicht die Ausstrahlungsbedingung, Monopol- und Dipolquellen des Integrals sehr wohl. Die zusätzlichen Moden verändern das Ergebnis nur im Fall 3. Würde man zur Bestimmung von  $g(\mathbf{s})$  aus  $p_{\text{in}}(\mathbf{r})|_{\partial V}$  nur die Integralgleichung des Falls 2 einfordern, so wäre die Lösung im Falle der Existenz von Moden nicht eindeutig, da  $g(\mathbf{s}) + \sum_l \alpha_l \frac{\partial p_l^{\text{res}}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})}$  für beliebige  $\alpha_l$  immer noch gültige Lösungen wären.

Andernfalls, wie in [Juh93] diskutiert, wäre die Integralgleichung im Fall 2 voll bestimmt. Damit die Lösung auch im Sonderfall eindeutig bleibt, müssen zur Integralgleichung Zusatzforderungen gestellt werden:

- entweder an wenigen, geeigneten Punkten (CHIEF points [Sch68]) werden Forderungen des Falls 3 gestellt, womit das Gleichungssystem überbestimmt ist,
- oder das Ergebnis des Integrals wird nach  $n(\mathbf{r})|_{\partial V}$  abgeleitet und mit reeller Konstante der Forderung in Fall 2 überlagert (Burton-Miller-Methode [BM71]).

**Schlussfolgerung 1:** Die Synthese beliebiger homogener Schallfelder im endlichen Volumen  $\bar{V}$  (Fall 3) ist anhand von gesteuerter Monopolquellen an  $\partial V$  stets eindeutig und vollständig definiert, d.h. durch die Kenntnis der gesamten Normalschnelle  $\frac{\partial [p_{\text{in}}(\mathbf{s}) + p_{\text{sc}}(\mathbf{s})]}{\partial n(\mathbf{s})}$  an einem dem Syntheseproblem äquivalenten, schallweichen Beugungskörper.

**Schlussfolgerung 2:** Zur Bestimmung eines endlichen, homogenen Feldes in  $\bar{V}$  reicht die Kenntnis jener Schallfeldgröße am Rand eines physikalischen Beugungskörpers immer vollständig aus, die komplementär zur Randbedingung ist. Druck am schallharten oder Oberflächenschnelle am schallweichen Körper. Denn nichttriviale Felder bilden sich am Beugungskörper stets nichttrivial ab: Die Helmholtzgleichung als DGL 2. Ordnung erlaubt dem nichttrivialen Feld nicht, dass gleichzeitig die schallweiche Randbedingung (zwingt 0. Ableitung auf 0) und die schallharte Randbedingung (zwingt 1. Ableitung auf 0) an einer in jede Richtung ausgedehnten Hüllfläche erfüllt sind.

**Schlussfolgerung 3:** Im Freifeld reicht die Kenntnis von Druck oder Oberflächennormalschnelle an der Hüllfläche  $\partial V$  alleine nicht immer zur vollständigen Beschreibung des endlich großen Feldes in  $\bar{V}$  aus. Diejenigen Stehwellenanteile, die nämlich ganz ohne Vorhandensein eines physikalischen Randes bereits eine schallweiche (Druck als Messgröße) bzw. schallharte (Schnelle als Messgröße) Randbedingung erfüllen, führen zu einer trivialen Messgröße. Es müssten entweder beide, Druck und Schnelle, bestimmt werden, oder zusätzliche, stützende Messgrößen im endlichen Volumen  $\bar{V}$  erhoben werden.

**Schallfeldsynthese ins unendliche Volumen  $V$ :** Das Einschichtpotential ist ohne Zusatzmaßnahmen nicht für die Synthese unendlicher Schallfelder geeignet. Das äquivalente Beugungsproblem für das endliche Volumen  $\bar{V}$  in Gl. (78) verdeutlicht:

Besteht  $p_{\text{in}} = p^{\text{res}}$  ausschließlich aus einem Stehwellenfeld geeigneter Frequenz und Form, das die Randbedingung  $p_{\text{in}}(\mathbf{s}) = p^{\text{res}}(\mathbf{s}) = 0$  erfüllt, dann ist der schallweiche Beu-

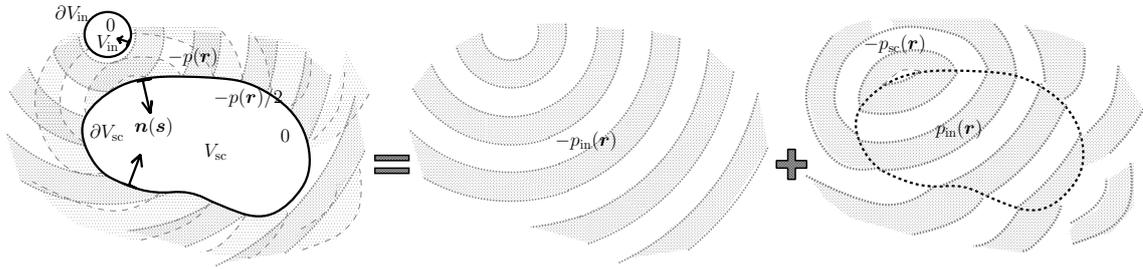


Abbildung 11 – Kirchhoff-Helmholtz-Integral angewendet, um schallweiche Beugung an  $\partial V_{sc}$ , die der Schallfeldsynthese äquivalent ist, zu verdeutlichen. Hier wird denkbare Interaktion des gebeugten Schallfeldes mit denkbaren Randbedingungen der virtuellen Quelle an  $\partial V_{in}$  vernachlässigt. Das dargestellte Feld muss außerhalb von  $V_{sc}$  dem negativen originalen Schallfeld  $-p_{in}(\mathbf{r})$  und dem gebeugten Schallfeld äquivalent sein, und der perfekten Schallfeldresynthese  $p_{in}(\mathbf{r})$  innerhalb von  $V_{sc}$ .

gungskörper in  $V$  und  $\partial V$  unsichtbar und erzeugt kein Streufeld als Reaktion  $p_{sc}(\mathbf{r}) = 0$ :

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial p^{res}(\mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{s})} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) dS(\mathbf{s}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in V, \\ 0, & \mathbf{r} \in \partial V, \\ p^{res}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \bar{V}. \end{cases}$$

Weil das Primärfeld  $p_{in}(\mathbf{r})$  schon vor Gl. (78) abgezogen wurde, beschreibt diese Gleichung bereits jenen Zusammenhang, den man zur Schallfeldsynthese ins unendliche Volumen mit dem Einschichtpotential anschreiben würde. Wir lesen ab:

*Das Integral über Green'sche Funktionen des Freifeldes erzeugt für bestimmte Modenformen an bestimmten Frequenzen keine Schallfelder im unendlichen Volumen und ist daher unvollständig.*

Weil die Wellengleichung bloß eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, können Oberflächenschnelle und Druck bei nichtverschwindenden Schallfeldern  $p \neq 0$  niemals gemeinsam null werden. Zwischen schallharten und schallweichen Oberflächenbedingungen unterscheiden sich zumindest stets Modenformen oder Modenfrequenzen. Daher gelingt eine vollständige Ausstrahlungssynthese immer dann, wenn ein physikalischer Aufbau nicht nur aus einem Monopolquellenintegral, sondern bei manchen Frequenzen/Moden auch aus einem Dipolquellenintegral bestehen darf. Praktisch geht das einfacher, indem innere Moden unterbunden werden, indem eine schallharte Randbedingung eingefordert wird.

### 3.3 Wellenfeldsynthese

Der Artikel [ZS13] zeigt (Abschnitt 6 des Artikels) eine einfache Herleitung der Wellenfeldsynthese in 3D mit den gängigen Kirchhoff-Approximationen (Hochfrequenz-BEM), die in der Vorlesung an der Tafel ausführlich behandelt wurde.

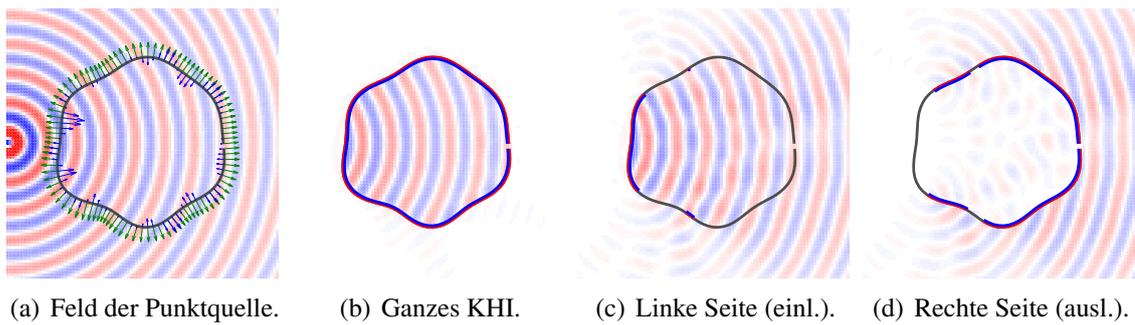


Abbildung 12 – Um das innere alleine korrekt nachzubilden, muss nicht das gesamte KHI gerechnet werden. Gebiete mit einlaufendem Schall genügen.

Offensichtlich, siehe Abb. 12, „schluckt“ das KHI jene Schallwellen, die nach außen aus dem Volumen wieder auslaufen würden. Nachdem diese Stellen nach außen strahlen und nicht nach innen, können sie problemlos aus dem Integrationsbereich („linke Seite“ in Abb. 12) entfernt werden, siehe auch [SRA08].

Weiters, ist auch nicht unbedingt erforderlich, dass Schallwellen ausschließlich von der übrig gebliebenen Integrationsfläche ins Volumen einlaufen. *Daher können Dipolquellen entfernt werden*, siehe Abb. 13.

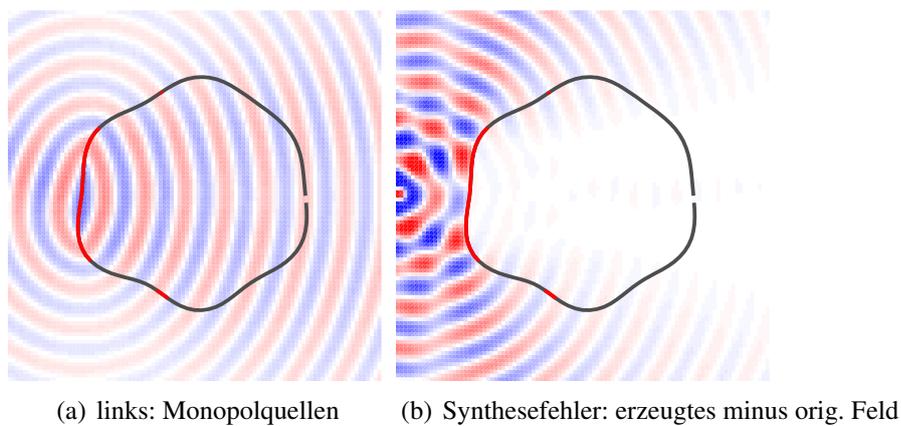


Abbildung 13 – Das KHI funktioniert auch, wenn es auf Stellen einlaufender Wellen und Monopolquellen reduziert wird, vgl. [SRA08]. Die Hüllfläche sollte aber konvex sein, um sichtbare Fehler zu verhindern.

### 3.4 Rayleigh-Integrale

Betrachten wir die  $xy$ -Ebene als Teilfläche des Kirchhoff-Helmholtz-Integrales, das wir über eine unendlich große Halbkugel über die positive  $z$ -Achse schließen, bleibt mit der Ausstrahlungsbedingung das Rayleigh-Integral über  $x, y$  übrig

$$p = - \iint_{-\infty}^{\infty} (G \frac{\partial}{\partial z'} p|_{z'=0} - p|_{z'=0} \frac{\partial}{\partial z'} G) dx' dy', \quad \text{Rayleigh-Integral.} \quad (80)$$

Das negative Vorzeichen entspricht der Oberflächennormale nach  $z^-$ . Mit der Eulergl. (25)  $\frac{\partial}{\partial z} p|_{z=0} = -i \rho \omega v_z|_{z=0}$  bleibt

$$p = \iint_{-\infty}^{\infty} (i \rho \omega G v_z|_{z'=0} + p|_{z'=0} \frac{\partial}{\partial z} G) dx' dy'.$$

Vorteil dieser Beschreibung ist, dass sie planare Holografie massiv vereinfacht. Der folgende Absatz zeigt, wie Vorgaben von Schnelle, Druck oder Quellstärke funktionieren.

**Schallschnelle als Randbedingung.** Die Vorgabe einer schallharten Normalschnelle an  $z' = 0$  kann so zusammengebaut werden: Die Quellen im Rayleighintegral werden leicht nach  $z^+$  verschoben und mit dem Spiegelquellenprinzip um  $z = 0$  nach  $z^-$  gespiegelt (die Ableitungsrichtung bei  $z^-$  ist natürlich auch zu spiegeln!):

$$p = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ (G^- + G^+) \frac{\partial}{\partial z'} p|_{z'=0} + p|_{z'=0} \left( -\frac{\partial}{\partial z'} G^- + \frac{\partial}{\partial z'} G^+ \right) \right] dx' dy'. \quad (81)$$

Vorzeichen sorgen dafür, dass bei  $\lim_{z^+ - z^- \rightarrow 0}$  der zweite Ausdruck in Klammern null wird. Damit bleibt die folgende Gleichung übrig:

$$p(x, y, z > 0) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} G(x - x', y - y', z) \frac{\partial}{\partial z'} p(x', y', 0) dx' dy'. \quad (82)$$

Sie stimmt nur auf der Seite  $z > 0$ , weil die feste Randbedingung bei  $z = 0$  nur durch Spiegelung simuliert ist.

**Schalldruck als Randbedingung.** Bei der Vorgabe des Schalldruckes an  $z = 0$  gilt ähnliches wie das oben gesagte. Im Unterschied dazu wird aber das Spiegelquelleprinzip mit negativem Vorzeichen angewendet, um eine ideal schallweiche Vorgabe des Schalldruckes zu erhalten. Es bleibt das Integral über Dipolquellen übrig

$$p(x, y, z > 0) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} p(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z} G(x - x', y - y', z) dx' dy'. \quad (83)$$

**Punktquellenverteilungen.** Interessant ist, dass die Randbedingung für Normalschnelle sehr einfache Struktur besitzt: eine kontinuierliche Verteilung von Punktquellen auf der  $xy$ -Ebene wird mit geeigneter Amplitudenverteilung  $f$  (*nicht Frequenz!*) betrieben

$$p(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x - x', y - y', z) f(x', y') dx' dy'. \quad (84)$$

Formal drückt das auch die Erzeugung des Schallfeldes aus, wenn verwendete Lautsprecher als Punktquellen modelliert werden können.

### 3.4.1 Was sich von den Rayleigh-Integralen lernen lässt

Aus dem Rayleigh-Integral, das eine Normalschnelle an  $z = 0$  erzwingt, lässt sich Interessantes lernen. Wenn man sich die Schnelle am rechten Grenzwert zur Randbedingung berechnet  $v_z|_{z=0^+} = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial}{\partial z} p|_{z=0^+}$  aus Gl. (82), findet man

$$v(x, y, 0^+) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x - x', y - y', z)}{\partial z} \Big|_{z=0^+} v_z(x', y', 0) dx' dy' = v(x, y, 0). \quad (85)$$

Das passiert, weil  $\frac{\partial}{\partial z}$  überall tangentialer Ableitungen der Green'schen Funktion beschreibt, welche 0 sind, außer an der Stelle  $x = x'$  und  $y = y'$ , daher  $\frac{\partial G(x-x', y-y', z)}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \delta(x - x', y - y')$ . Die Green'sche Funktion unter dem Integral wird daher nur einen Beitrag zur Normalschnelle am Rand machen an der Stelle, wo sie sitzt, lokal, sonst nirgends.

Betrachtet man gekrümmte Flächenintegrale, tritt folgendes zutage: Green'sche Funktionen fürs Freifeld bringen dann sehr wohl einen Beitrag zur Normalschnelle am Rand, auch wenn sie wo anders sitzen. Das liegt daran, dass die Ableitungen nicht mehr überall tangential sind. Für Wellenfeldsynthese wird dennoch, auch an allgemeinen Oberflächen, das Verhalten der ebenen Rayleighintegrale angenommen und approximiert.

## 4 Planare Holografie / Holografie

### 4.1 Planare Nahfeldholografie mit Mikrofonarray

Wird eine kontinuierliche Schallschnelleverteilung im Abstand  $d$  anhand eines Satzes von  $M$  Mikrofonen ermittelten Schalldruckmesswerten im Normalabstand  $d$  gesucht, ergibt das Rayleigh-Integral folgendes System an Gleichungen

$$\begin{aligned} p(x_1, y_1, d) &= 2 i \rho \omega \iint_{-\infty}^{\infty} G(x_1 - x', y_1 - y', d) v_z(x', y', 0) dx' dy' \\ &\vdots \\ p(x_M, y_M, d) &= 2 i \rho \omega \iint_{-\infty}^{\infty} G(x_M - x', y_M - y', d) v_z(x', y', 0) dx' dy'. \end{aligned}$$

In der Praxis kann die Gleichung mit den Integralen so nicht invertiert werden. Die Integrale werden daher in kleine Schritte  $\Delta x$  und  $\Delta y$  diskretisiert. Matriziell formuliert ist das

$$\begin{bmatrix} p(x_1, y_1, d) \\ \vdots \\ p(x_M, y_M, d) \end{bmatrix} = 2 i \rho \omega \sum_{l_x, l_y} \begin{bmatrix} G(x_1 - l_x \Delta x, y_1 - l_y \Delta y, d) \\ \vdots \\ G(x_M - l_x \Delta x, y_M - l_y \Delta y, d) \end{bmatrix} v_z(l_x \Delta x, l_y \Delta y, 0) \Delta x \Delta y.$$

Vereinfacht vektoriell geschrieben ist das  $\mathbf{p} = \mathbf{G} \mathbf{v}_z$ . Typischerweise haben wir für die Gleichung wesentlich weniger Messwerte  $M$  für  $\mathbf{p}$  als wir hochauflösende Berechnungswünsche an die Vielzahl von Bildpunkten  $L_x, L_y$  haben. Uns muss bewusst sein, dass bei  $8 \times 8 = 64$  gemessenen Werten und einem gesuchten Bild von  $L_x \times L_y = 100 \times 100$  Schnellewerten 9936 Freiheitsgrade auftreten. Das matrizielle Problem wird zumeist als Quadratminimierungsaufgabe gelöst

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{v}_z\|_2^2 \\ \text{Nebenbedingung: } \mathbf{p} = \mathbf{G} \mathbf{v}_z \end{aligned}$$

(oder mit der Entfaltungsmethode aus Abschn. 4.3.6). Die Erkenntnis, dass wir keine physikalisch exakte Abbildung bekommen können, lässt aber auch die Erkenntnis aus der Masterarbeit von Philipp Schmidt [Sch12a] zu, nach anderen Metriken optimieren zu dürfen. Wir bekommen zum Beispiel für die Optimierung der  $L_p$ -Norm  $\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots}$

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{v}_z\|_p \\ \text{Nebenbedingung: } \mathbf{p} = \mathbf{G} \mathbf{v}_z. \end{aligned}$$

für den Wert von  $p = 1$  eine Lösung  $\mathbf{v}_z$  mit möglichst wenigen Einträgen, die verschieden von null sind. Dieser Ansatz forciert offenbar verstärkt *dünnbesetzte* Lösungen (engl. *sparsity enforcing*). Sehr große Werte  $p \rightarrow \infty$  forcieren verschmierte Lösungen, wonach alle Einträge in  $\mathbf{v}_z$  möglichst den gleichen Betrag haben.

**Regularisierung.** Die Matrix  $\mathbf{G}$  ist oft *schlecht konditioniert*. Das bedeutet, dass manche ihrer Einträge verschwindend gering sind. Insbesondere betrifft das jene Muster, die sehr große räumliche Variationen an der Mikrofon-Messfläche beschreiben, z.B. solche Muster  $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$ . Dieses Problem ist gänzlich unabhängig von der holografischen Minimierungsaufgabe selbst. Diese örtlich stark variierenden Muster sind physikalisch nicht leicht so zu erzeugen, dass sie an der Messfläche noch nennenswerte Amplituden hervorrufen. Dementsprechend sind sie auch im Modell  $\mathbf{G}$  der Schallausbreitung unterrepräsentiert. Analytisch zwar noch unbedenklich, schleichen sich in der Praxis allerdings Fehler bei Messungenauigkeiten ein, die im Wertebereich der erwarteten, verschwindenden akustischen Muster liegen. Regularisierung überschätzt diese Muster, damit bei Inversion nicht mehr versucht wird, sie peinlich genau zu rekonstruieren. Dazu wird der Diagonale der singulärwertzerlegten Matrix ein kleiner Beitrag  $\alpha$  hinzugefügt:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T, \quad \implies \mathbf{G}_{\text{reg}} = \mathbf{U} [\mathbf{S} + \alpha \mathbf{I}] \mathbf{V}^T. \quad (86)$$

Eine Inverse von  $\mathbf{G}_{\text{reg}}$  versucht nicht mehr, Komponenten mit weniger oder gleich der Größenordnung von  $\alpha$  zu retten.

#### 4.1.1 Fehlerquadratminimierung und Quadratminimierungsaufgaben

Die rechteckige ( $n \times m$ ) Modellmatrix  $\mathbf{A}$  sollen mit den gesuchten  $m$  Parametern  $\mathbf{x}$  die  $n$  Messwerte  $\mathbf{b}$  ergeben,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (87)$$

Dazu gibt es eine Lösung und zwei klassische Lösungsstrategien in Abhängigkeit der Größenverhältnisse. Nehmen wir an,  $\mathbf{A}$  sei gut konditioniert.

**Inversion:  $\mathbf{x}$  bestimmt,  $n = m$ .** Die Matrix ist quadratisch und besitzt eine Inverse

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (88)$$

**Fehlerquadratminimierung:  $\mathbf{x}$  überbestimmt,  $n > m$ .** Weil mehr Forderungen  $n$  als Parameter  $m$  vorliegen, und unbekannt ist, wie genau Modell und Messung übereinstimmen, muss eine fehlerbehaftete Nachbildung angenommen werden. Als Kostenfunktion minimieren wir die Quadratnorm des Fehlervektors

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^H (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}), \quad (89)$$

durch Nullsetzen der Ableitungen

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^H (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{b}. \quad (90)$$

Offensichtlich ist  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$  zu  $\mathbf{A}$  linksinvers, invertiert  $\mathbf{A}$  aber nicht von rechts.

**Quadratminimierung:  $\mathbf{x}$  unterbestimmt,  $n < m$ .** Mit der Fülle an  $m$  Parametern sind  $n$  Forderungen vieldeutig einhaltbar. Lösungen konstanter  $L_2$ -Norm liegen auf einer  $m$ -dimensionalen Hyperkugel, während die Forderungen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  eine Hyperebene aufspannen. Die Lösung minimaler  $L_2$ -Norm ist der Berührungspunkt der Hyperkugel und ihrer Tangentialkugel des Mittelpunktes  $\mathbf{0}$ . Norm plus Nebenbedingung mal Lagrangemultiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}$  ergeben die Kostenfunktion

$$J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}^H \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^H (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}). \quad (91)$$

Minimierung geschieht durch Nullsetzen der Ableitungen nach  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} &= 2\mathbf{x}^H + \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{A} = \mathbf{0}, & \Rightarrow \mathbf{x} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}^H \boldsymbol{\lambda}. \\ \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\lambda}^H} &= \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \stackrel{\text{mit oben}}{\Rightarrow} -\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}, & \stackrel{\text{invers}}{\Rightarrow} \boldsymbol{\lambda} &= -2 (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{b}, \\ \Rightarrow \mathbf{x} &= \mathbf{A}^H (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{b}. & & \end{aligned} \quad (92)$$

Offensichtlich ist  $\mathbf{A}^H (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1}$  zu  $\mathbf{A}$  rechtsinvers.

**Verallgemeinerte Inverse: Pseudoinverse.** Die Singulärwertzerlegung von  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^H$$

zerlegt in die zwei Matrizen  $\mathbf{U}_{(n \times n)}$ ,  $\mathbf{V}_{(m \times m)}$ , die unitär sind  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{I}$ , und eine  $(n \times m)$  Diagonalmatrix  $\mathbf{S} = \text{diag}_{(n \times m)} \{[s_i]_i\}$  mit den absteigend sortierten, reellen, positiven Singulärwerten  $s_i \in \mathbb{R}^+$ ;  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0$ . Die verallgemeinerte Inverse oder Pseudoinverse ist

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{U}^H, \quad \text{mit } \mathbf{S}^\dagger = \text{diag}_{(m \times n)} \{[1/s_i]_i\}. \quad (93)$$

Sie ist einfach zu regularisieren, indem die Singulärwerte  $s_i$  nach unten hin begrenzt werden. Weiters ist sie für  $n = m$  invers, für  $n > m$  linksinvers und für  $n < m$  rechtsinvers.

Laut [GK65] findet die Pseudoinverse  $\mathbf{A}^\dagger$  den kürzestmöglichen Lösungsvektor  $\mathbf{x}$  mit dem kürzestmöglichen Fehlervektor  $\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$ .

#### 4.1.2 Konditionierung einer Matrix

Die Konditionszahl ist definiert als Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Singulärwert:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{s_{\max}}{s_{\min}}, \quad (94)$$

und sie liegt im Wertebereich  $1 \leq \kappa \leq \infty$ . Sie gibt Auskunft über die Dynamik der Matrix  $\mathbf{A}$ , und somit, wie fehleranfällig es ist, mit der (Pseudo-)Inversen von  $\mathbf{A}$  zu arbeiten.

**Erläuterung:** Die Multiplikation eines Parametervektors  $\mathbf{x}$  mit einer unitären Matrix  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^H \mathbf{x}$ , also  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{I}$ , ist nicht normverändernd:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_2^2 = \|\mathbf{V}^H \mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^H \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Die Norm des Abbildes  $\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  ist mit  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^H$

$$\|\mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^H \mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{U} \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 = \|\mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}\|_2^2.$$

Sofern  $\mathbf{S}$  mindestens so viele Zeilen wie Spalten hat, liegt die Norm im Wertebereich

$$s_{\min} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{b}\|_2 \leq s_{\max} \|\mathbf{x}\|_2.$$

Kommt zu  $\mathbf{x}$  ein Fehler  $\epsilon$  der Norm  $\|\epsilon\|_2 = \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\kappa(\mathbf{A})}$ , ist die Norm des Bildfehlers  $\mathbf{b}_\epsilon = \mathbf{A} \epsilon$

$$\frac{s_{\min}^2}{s_{\max}} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{b}_\epsilon\|_2 \leq s_{\min} \|\mathbf{x}\|_2.$$

Schlimmstenfalls treffen sich hier beide Normen  $\|\mathbf{b}_\epsilon\|_2 \leq \|\mathbf{b}\|_2$ . Für Fehlertoleranz sollte die Konditionszahl daher klein sein  $\kappa \rightarrow 1$ , damit das erst bei richtig großen Fehlern  $\|\epsilon\|_2 \approx \|\mathbf{x}\|_2$  passieren kann. Die Abbildung kleiner Fehler  $\|\epsilon\|_2 \ll \|\mathbf{x}\|_2$  bleibt dann auch ausnahmslos klein  $\|\mathbf{b}_\epsilon\|_2 \ll \|\mathbf{b}\|_2$ .

In unserem unterbestimmten holografischen Fall, in dem  $\mathbf{S}$  weniger Zeilen als Spalten hat, gelten die selben Überlegungen für das rechtsinverse System. Allerdings für die Auswirkung von Messfehlern in  $\mathbf{b}$  auf die Norm des holografischen Abbildes  $\mathbf{x}$ .

### 4.1.3 $L_p$ -Norm-Minimierung

Mit Softwarepaketen zur konvexen Optimierung lassen sich kompliziertere Probleme lösen, die statt der quadratischen Norm andere Normen minimieren.

Die Fehlerminimierung in der  $L_p$ -Norm, bzw. bedingte Minimierung der  $L_p$ -Norm etwa, würde in CVX, einem MATLAB-Paket [CR12, GB08] so aussehen:

```
n = size(A,1); m = size(A,2);
if (n>m)
    cvx_begin
        variable x(m) complex
        minimize( norm( A * x - b , p ) )
    cvx_end
else
    cvx_begin
        variable x(m) complex
        minimize( norm( x , p ) )
        subject to
            A * x == b
    cvx_end
end
```

Wobei in der Praxis anstelle der starren Nebenbedingung oft eine kleine quadratische Abweichung  $\beta$  zugelassen wird, um stabilere Konvergenz zu erzielen, siehe [Sch12a]. Die entsprechenden Zeilen werden dann ersetzt durch

```
subject to
    sum(square_abs( A * x - b ) <= beta
```

## 4.2 Feldberechnung bei Schnelle-Randwertaufgabe entlang $x$

Eine beispielhafte Randwertaufgabe für die Normalableitung des Druckes in Form einer Rechteckspaltfunktion erfordert die örtliche Faltung mit der Formel für die Green'sche Funktion, entsprechend dem Rayleigh-Integral

$$p(\mathbf{r}) = 2 \frac{\partial}{\partial y} p(x) \Big|_{y=0} \star G_{2D}(x, y). \quad (95)$$

Die Green'sche Funktion für den betrachteten 2D-Fall eingesetzt, erhalten wir

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial y} p(x) \Big|_{y=0} \star \frac{i}{2} H_0^{(2)} \left( k \sqrt{y^2 + x^2} \right). \quad (96)$$

und das Ergebnis laut Abbildung 14.

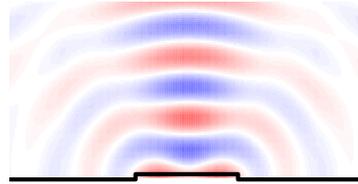


Abbildung 14 – 2D Feld eines Rechteckspaltes, Faltungs-/Integralformulierung.

## 4.3 Fouriertransformation für planare Holografie/Holografie

**Schnelle Faltung:** Wenngleich wir ebene Wellen bislang nicht genutzt haben, lässt sich damit schnelle Faltung implementieren, was in den Anfängen der Holografie von ermöglichender, und entscheidender Bedeutung war [Wil99, Fle88]. Die doppelte Zirkulantenmatrix  $\mathbf{G}$  der Aufgabe zuvor (einmal in  $x$  und das andere mal in  $y$ ) diagonalisiert sich durch die Transformation in den örtlichen Fourierbereich. Das macht die Faltung/Entfaltung im reellen Wellenzahlbereich effizient, allerdings aber auch zyklisch.

### 4.3.1 Fernfeldrichtwirkung:

Zur Berechnung der Fernfeldrichtwirkung endlicher Anordnungen gilt mit  $G \propto e^{ik\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}}$ , dass die Fouriertransformation des Schnelleverlaufs verwendet werden darf (vgl. [Mös88, Mös09, Wik10]). Die Quellen im gegebenen Fall liegen entlang  $x$ , also  $\boldsymbol{\theta} = (1, 0)^T$ , somit bleibt  $e^{ik \cos \varphi}$  für die Exponentialfunktion. *Die Fernfeldapproximation des Schalldrucks ist also proportional zur Fouriertransformation des Schnelleverlaufes*

$$p_\infty(\varphi) \propto \mathcal{F}_{x, k_x = k \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \right\}. \quad (97)$$

### 4.3.2 Holografische Auswertung, Schalldruck entlang $x$ bekannt.

In direkter Umkehrung zur Randwertaufgabe mit der Schnelle, bekommen wir durch die spektrale Entfaltung des Druckes mit dem Fourier-Transformationssymbol  $\mathcal{F}_{x,k_x}\{\cdot\}$

$$v_y(x)|_{y=0} = \mathcal{F}_{x,k_x}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{x,k_x}[p(x, y_0)]}{\mathcal{F}_{x,k_x} \left[ \frac{\rho\omega}{2} H_0^{(2)} \left( k\sqrt{y_0^2 + x^2} \right) \right]} \right\}. \quad (98)$$

Am effizientesten lässt die FFT schnelle Berechnungen zu. Dabei ist - genauso wie in der digitalen Signalverarbeitung [OSB99] - die implizit zyklische Geometrie des Problems im Ortsbereich zu berücksichtigen.

Der Schalldruck, an anderen Punkten als den gemessenen, wird durch Einsetzen in Gl. (96) erreicht

$$p(\mathbf{r}) = \mathcal{F}_{x,k_x}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{x,k_x}[p(x, y_0)]}{\mathcal{F}_{x,k_x} \left[ H_0^{(2)} \left( k\sqrt{y_0^2 + x^2} \right) \right]} \mathcal{F}_{x,k_x} \left[ H_0^{(2)} \left( k\sqrt{y^2 + x^2} \right) \right] \right\}. \quad (99)$$

Regularisierung kann durch Begrenzung der Kleinheit des Nenners erreicht werden.

### 4.3.3 Beispiel: Fernfeldholografie für endliche lineare Lautsprecherzeile in 2D

Werden mehrere der oben gezeigten Rechteckfunktion im Abstand  $\Delta x$  aneinandergesetzt, können Schallfelder von Lautsprecherzeilen damit simuliert werden, siehe Abb. 15.

Im gegebenen Beispiel wird i.W. die *Fernfeldlösung* für reelle  $-k \leq k_x \leq k$  betrachtet, also jene der (unendlich ausgedehnten) ebenen Wellen. Mit dem Phasenmodulationsatz der Fouriertransformation wird Strahlformung (*beamforming*) erreicht. Ziel davon ist die Anregung eines Schallstrahls, einer möglichst isolierten einzelnen ebenen Welle. Das Richtdiagramm zeigt  $\nu_y(k \cos(\varphi))$  diesen Bereich. Es ist wichtig zu wissen, dass der jeweilige Ausschnitt aus dem Wellenzahlspektrum stets frequenzabhängig ist ( $k = \omega/c$ ), während es selbst ausschließlich von der örtlich eingepprägten Schwingungsform abhängt.

**(Fernfeld-)Aliasing.** Das zweite Richtwirkungsdiagramm in Abb.15 schneidet aus dem Wellenzahlspektrum  $\nu_y(k_x)$  einen Bereich  $-k \leq k_x \leq k$  heraus, der größer ist, somit der Fernfeldabstrahlung bei höheren Frequenzen entspricht. Weil darin bereits eine Spiegelkomponente des Wellenzahlspektrums  $\nu_y(k_x)$  zu sehen ist, sprechen wir von (Fernfeld-)Aliasing; also einer mehrdeutigen Richtungsabbildung der Fernfeldabstrahlung.

Als Bedingung gegen (Fernfeld-)Aliasing ergibt sich allgemein die Forderung nach mindestens zwei Abtastpunkten pro Wellenlänge

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} < \frac{\pi}{\Delta x}, \quad \Rightarrow \Delta x < \frac{\lambda}{2}. \quad (100)$$

Im speziellen Fall der Fernfeldholografie/des Beamformings im Winkel  $\varphi$  (hier als Winkel zur  $y$ -Achse normal auf das Array) könnte man noch ein bisschen weiter gehen (best case:

$\varphi = 0$ , worst case  $\varphi = \pm\pi/2$  „end fire direction“, sofern sich einfallende Schallwellen von außerhalb des Winkel  $\pm\varphi_{\max}$  ausschließen lassen (!)

$$k(1 + |\sin(\varphi_{\max})|) < \frac{2\pi}{\Delta x}, \quad \Rightarrow \Delta x < \frac{\lambda}{1 + |\sin(\varphi_{\max})|}.$$

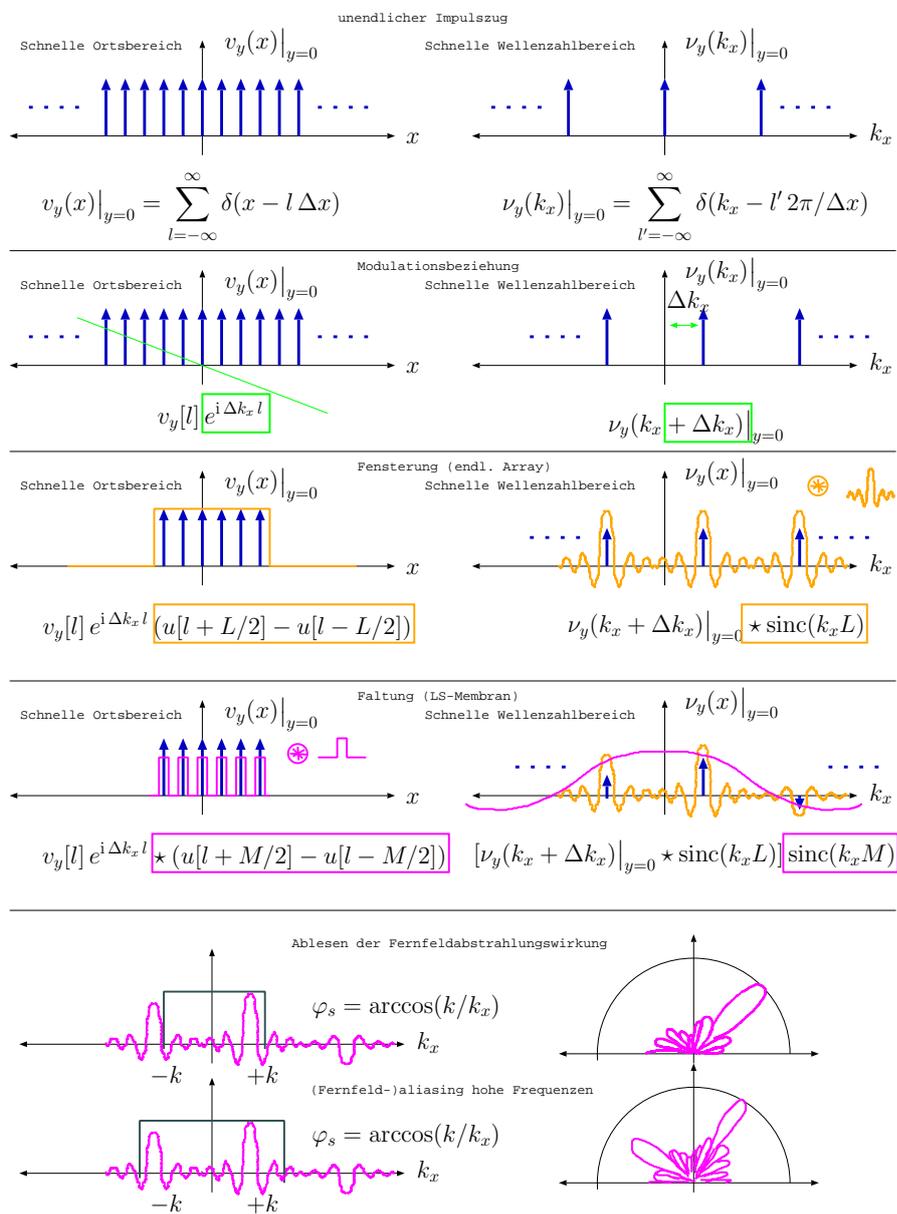


Abbildung 15 – Räumliche Signalverarbeitung für ein 1D Lautsprecherarray.

### 4.3.4 Beispiel: Holografie mit endlicher linearer 1D Mikrofonzeile in 2D

Ist der Schalldruck lediglich an diskreten Punkten  $l\Delta x$  bekannt, wiederholt sich (wie oben) das Wellenzahlspektrum  $\psi(k_x)|_{y=y_0}$  mit der Periode  $k_{xp} = \frac{2\pi}{\Delta x}$ .

**Nahfeld-Aliasing.** Stimmt die Annahme, das Wellenzahlspektrum verschwinde für  $|k_x| > \frac{2\pi}{\Delta x}$ , entstehen weder Abtastungsfehler noch Aliasing. Das hängt von der kleinsten Strukturwellenlänge des Schallerzeugers ab und nicht der Luftwellenlänge  $\lambda$ .

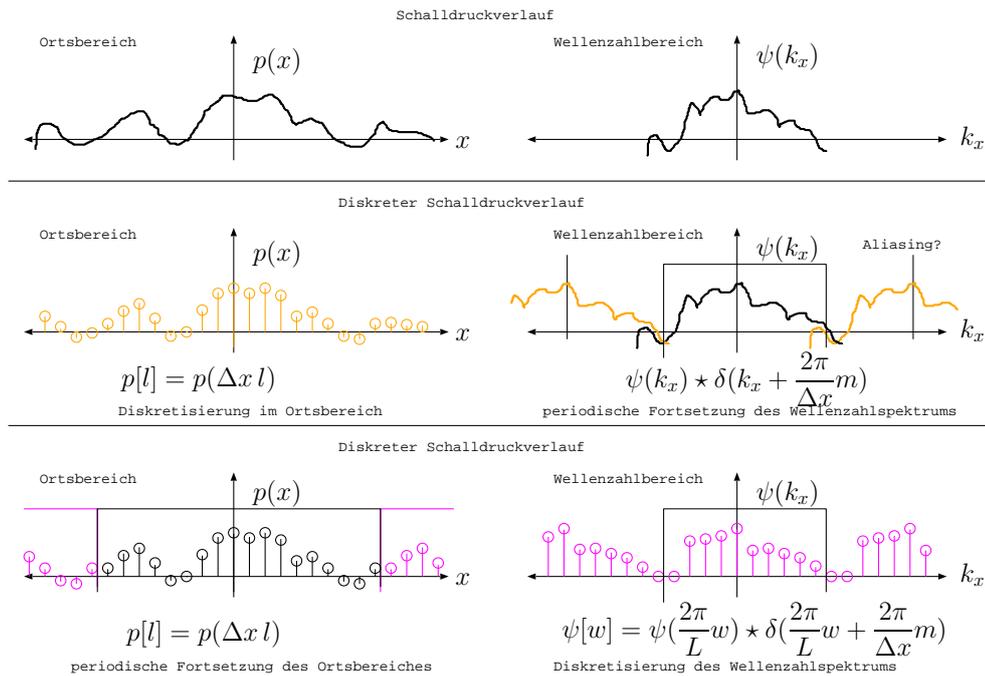


Abbildung 16 – Holografie mit diskreter linearer Mikrofonzeile endlicher Länge.

**Verwendung der DFT zur Berechnung des Wellenzahlspektrums.** Liegen  $N$  diskret gemessene Schalldrücke als Reihe  $p[l], l = 0, \dots, N - 1$  vor, wird die DFT zur Berechnung des Wellenzahlspektrums verwendet<sup>8</sup>

$$\psi[w] = \sum_{l=0}^{N-1} p[l] e^{i \frac{2\pi}{N} l w}. \quad (101)$$

Die Wellenzahl  $k_x$  zum Index  $w$  geht aus der diskretisierten Lösung hervor ( $x \rightarrow \Delta x l$ ):

$$e^{i k_x \Delta x l} \leftrightarrow e^{i \frac{2\pi}{N} w l}, \quad \Rightarrow k_x[w] = \frac{2\pi}{N \Delta x} w. \quad (102)$$

Mit diesem Wert für  $k_x$  können die räumlichen Ausbreitungsfiler für jeden diskreten Wellenzahlbin  $w$  ausgewertet werden, um damit Holografie/Holografie (s.o.) zu betreiben.

8. Für Zeitsignale wird typischer Weise ein anderes Vorzeichen im Exponenten verwendet.

### 4.3.5 Randwertaufgabe: Schnelle entlang $x, y$

Wird als Randwert eine erzwungene Schwingung auf der  $xy$ -Ebene mit der Normalschnelle  $v_z(x, y)|_{z=0}$  angenommen, ergeben sich ähnliche Formulierungen und Probleme wie im 2D-Randwertproblem. Die Grundgleichungen sind:

$$p(\mathbf{r}) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(k_x, k_y) e^{-ik_z(k_x, k_y)z} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y, \quad (103)$$

$$v_z(\mathbf{r}) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nu_z(k_x, k_y) e^{-ik_z(k_x, k_y)z} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y,$$

$$\Rightarrow \nu_z(k_x, k_y) = \frac{k_z}{\omega \rho} \psi(k_x, k_y). \quad (104)$$

**Struktur der Randwertaufgabe: 2D Faltung mit rotationssymmetrischer Ausbreitungsfunktion.** Dem Faltungssatz gemäß entspricht die Randwertaufgabe der zweidimensionalen Faltung im Ortsbereich [WMS80, Wil99]

$$p(\mathbf{r}) = v_z(x, y)|_{z=0} \star \star \left( \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \omega}{k_z(k_x, k_y)} e^{-ik_z(k_x, k_y)z} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y \right). \quad (105)$$

Auch hier ist die Stelle  $k_z = \pm k$  bei der Auswertung des Schalldruckes kritisch, weil durch  $k_z$  dividiert wird. *Die spätere Herleitung mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral erlaubt auch hier eine elegante Formulierung:*

$$2\omega \rho G_{3D} = \rho \omega \frac{e^{-ikr}}{2\pi r}, \quad (106)$$

$$p(\mathbf{r}) = v_z(x, y)|_{z=0} \star \star 2\rho \omega G_{3D}(x, y). \quad (107)$$

### 4.3.6 Holografische Auswertung, Schalldruck entlang $x, y$ bekannt.

In direkter Umkehrung zur Randwertaufgabe mit der Schnelle - ähnlich wie in 2D - erhalten wir aus dem Druck durch die spektrale Entfaltung mit dem Fourier-Transformationssymbol  $\mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y} \{ \cdot \}$

$$v_z(x, y)|_{z=0} = \mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y} [p(x, y, z_0)]}{\mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y} [2\rho \omega G_{3D}(x, y, z_0)]} \right\}. \quad (108)$$

Am leichtesten lässt sich die Entfaltung hier mit der zweidimensionalen DFT (reelle Wellenzahlen) rechnen.

Der Schalldruck an anderen Punkten als den gemessenen wird wieder durch Einsetzen errechnet

$$p(\mathbf{r}) = \mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y} [p(x, y, z_0)]}{\mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y} [G_{3D}(x, y, z_0)]} \mathcal{F}_{x, k_x, y, k_y} [G_{3D}(x, y, z)] \right\}. \quad (109)$$

**Vorne-Hinten-Ambiguität.** Wie bereits im 1D Beispiel gezeigt, kann das Holografische Problem basierend auf dem Schalldruck keine Information darüber liefern, ob das Feld von  $+z$  oder  $-z$  einläuft. Das resultiert aus der Wurzel  $k_z = \pm\sqrt{k^2 - (k_y^2 + k_x^2)}$ . Werden jedoch *zusätzlich* Messungen der Schallschnelle durchgeführt, lassen sich beide Richtungen trennen. Die Berechnung dazu erfolgt wie im 1D-Beispiel.

**Auswirkung der endlichen Messfläche.** Typischerweise (vgl. Abb. 15) muss bei der Bestimmungen von ebenen Schalldruckverteilungen von endlichen Detektionsflächen ausgegangen werden. Diese Form der räumlichen Fensterung kann für den oben gezeigten Fall mit dem Rechteckfenster  $\Pi(x, y | L_x, L_y)$  angeschrieben werden

$$\psi(k_x, k_y)|_{z=0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Pi(x, y | L_x, L_y) p(x, y)|_{z=0} e^{ik_x x + ik_y y} dx dy. \quad (110)$$

Wir setzen zunächst eine ebene Welle aus  $\theta$  an. Aus dem Faltungssatz ergibt sich als Wellenzahlspektrum keine Delta-Funktion mehr an  $k_{sx} = k \cos(\varphi_s) \sin(\vartheta_s)$  und  $k_{sy} = k \sin(\varphi_s) \sin(\vartheta_s)$ , sondern

$$\psi(\mathbf{k}) = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \operatorname{sinc}\left[(k_x - k_{sx}) \frac{L_x}{2}\right] \operatorname{sinc}\left[(k_y - k_{sy}) \frac{L_y}{2}\right], \quad (111)$$

wobei hier  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  bedeuten soll (Achtung in MATLAB anders definiert).

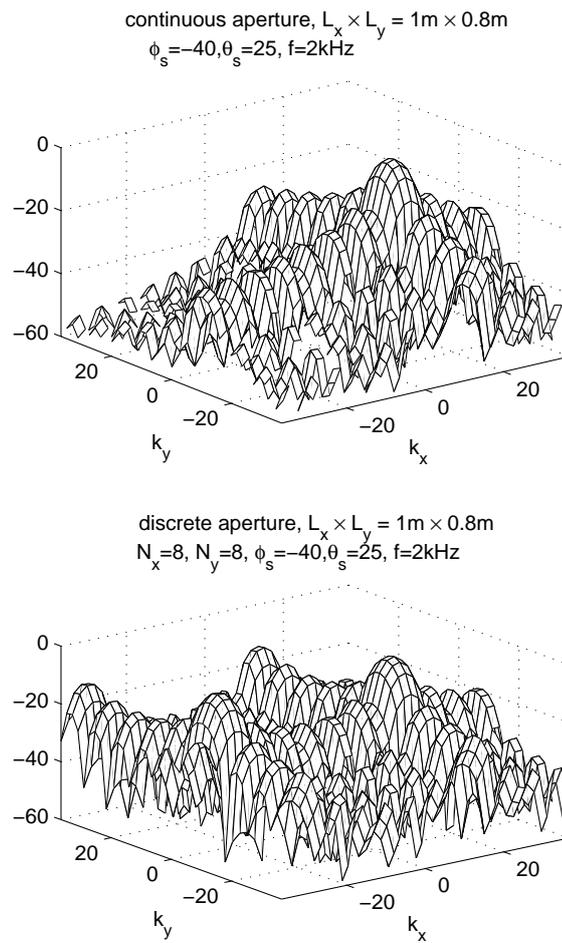


Abbildung 17 – Sinc-Funktion als Wellenzahlspektrum einer ebenen Welle bei endlicher Apertur. Periodische sinc-Funktion bei abgetasteter Apertur.

**Verwendung der DFT.** Gleichmäßige räumliche Abtastung der Strecke  $L_x$  und  $L_y$  mit  $N_x$ , bzw.  $N_y$  Punkten ermöglicht eine vereinfachte Zerlegung in ein diskretes Wellenzahlspektrum entlang von  $x [l_x] = \Delta x l_x$  und  $y [l_y] = \Delta y l_y$  über die DFT

$$\psi [w_x, w_y]_{z=0} = \sum_{l_x=-N_x/2+1}^{N_x/2} \sum_{l_y=-N_y/2+1}^{N_y/2} p [l_x, l_y]_{z=0} e^{i \frac{2\pi}{N_x} w_x l_x + i \frac{2\pi}{N_y} w_y l_y} \quad (112)$$

Wird ein senkrecht einfallender Impuls zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Form einer ebenen Welle aufgenommen ( $p[l_x, l_y] = 1$ ), ergibt sich<sup>9</sup>, wie im unteren Bild in Abb. 17 nur ohne Verschiebung:

$$\psi [w_x, w_y]_{z=0} = \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{N_x} (N_x - 1) w_x \right] \sin \left[ \frac{\pi}{N_y} (N_y - 1) w_y \right]}{\sin \left( \frac{\pi}{N_x} w_x \right) \sin \left( \frac{\pi}{N_y} w_y \right)},$$

Die diskreten Wellenzahlen ergeben sich aus dem Vergleich  $k_x \Delta x l_x = \frac{2\pi}{N_x} w_x l_x$  zu<sup>10</sup>

$$k_x [w_x] = \frac{2\pi}{N_x \Delta x} w_x, \quad k_y [w_y] = \frac{2\pi}{N_y \Delta y} w_y. \quad (113)$$

Dem entsprechend berechnen sich die Einfallswinkel der diskreten Wellenzahl-DFT-Bins zu

$$\varphi [w_x, w_y] = \arctan \left( \frac{k_y [w_y]}{k_x [w_x]} \right) = \arctan \left( \frac{w_y N_x \Delta x}{w_x N_y \Delta y} \right) \quad (114)$$

$$\vartheta [w_x, w_y] = \arccos \left( \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k} \right) = \arccos \left( \frac{\sqrt{(w_x N_y \Delta y)^2 + (w_y N_x \Delta x)^2}}{k \frac{N_x \Delta x N_y \Delta y}{2\pi}} \right) \quad (115)$$

**Modulationsatz: Beamsteering.** Oben wurde das Wellenzahlspektrum für  $p[l_x, l_y] = 1$  gezeigt, das eine Bündelungswirkung nach  $\varphi = \vartheta = 0^\circ$  besitzt. Mit dem Modulationsatz kann es verschoben, d.h. neu ausgerichtet werden:

$$p[l_x, l_y] e^{i \Delta w_x l_x} e^{i \Delta w_y l_y} \Leftrightarrow \psi [w_x - \Delta w_x, w_y - \Delta w_y]. \quad (116)$$

Dieser örtliche Phasenbelag (entspr. zeitl. Verzögerung) kann entweder die Fernfeldrichtwirkung eines Mikrofonarrays elektronisch steuern, indem alle Signale nach der Phasengewichtung summiert werden, oder die Abstrahlungswirkung eines Lautsprecherarrays, auf welches ein solcherart gewichtetes Signal wiedergegeben wird.

9. mit  $\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} e^{-i \frac{2\pi}{N} w l} = \frac{e^{i \frac{\pi}{N} (N-1) w} - e^{-i \frac{\pi}{N} (N-1) w}}{e^{i \frac{\pi}{N} w} - e^{-i \frac{\pi}{N} w}} = \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{N} (N-1) w \right]}{\sin \left( \frac{\pi}{N} w \right)}$

10. kontinuierlich  $\psi (k_x, k_y)_{z=0} = \frac{\sin \left[ (k_x - k_{sx}) \frac{N_x \Delta x}{2} \right] \sin \left[ (k_y - k_{sy}) \frac{N_y \Delta y}{2} \right]}{\sin \left[ (k_x - k_{sx}) \frac{N_x \Delta x}{2(N_x - 1)} \right] \sin \left[ (k_y - k_{sy}) \frac{N_y \Delta y}{2(N_y - 1)} \right]}$

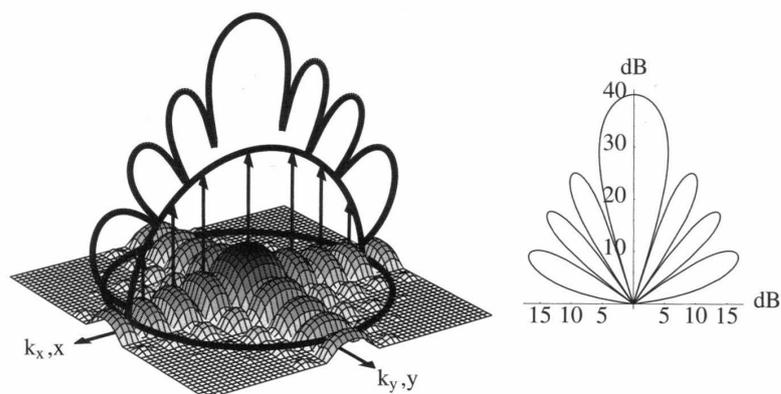


Abbildung 18 – Das Fernfeld-Richtmuster von rechteckigen Lautsprecher- oder Mikrofonfeldern kann aus dem Wellenzahlspektrum der Schallschnelle abgelesen werden [Wil99].

#### 4.3.7 Aliasing

Bei sehr hohen Frequenzen überdecken die Bins der 2D DFT nicht mehr jenen für alle Raumwinkel benötigten Wellenzahlbereich  $k_x[N_x] < k$  und/oder  $k_y[N_y] < k$ . Während in Gl. (114) die Zuordnung zum Azimutwinkel immer gegeben ist, wird insbesondere Gl. (115) mehrdeutig. Die inhärente periodische Fortsetzung des Wellenzahlspektrums muss dazu berücksichtigt werden, also auch an  $w_x > N_x$ ,  $w_x < 0$  und  $w_y > N_y$ ,  $w_y < 0$  ausgewertet werden. Die periodische Fortsetzung des Spektrums durch räumliche Abtastung wird *räumliches (Fernfeld-)Aliasing* genannt und resultiert in mehrdeutiger Richtungszuordnung bei ebenen Arrays.

Fernfeldaliasing tritt wie oben bei der Überschreitung der Grenzfrequenzen auf:

$$f_{og,x} = \frac{c}{2\Delta x}, \quad f_{og,y} = \frac{c}{2\Delta y}. \quad (117)$$

Kann ein eingegrenzter Einfallsbereich von Wellen  $\vartheta_{\max}$  angenommen werden, erhöhen sich die Alias-Frequenzen entsprechend, siehe oben.

Wie oben sei angemerkt: Nahfeld-Aliasing kann bei tieferen Frequenzen auftreten. Grundsätzlich gilt: Die Strukturwellen mit der höchsten örtlichen Frequenzkomponente muss zumindest zweimal abgetastet werden. Räumliche Unstetigkeiten wie etwa der Rand einer Lautsprechermembran können in den wenigsten Fällen noch ausreichend genau abgetastet werden (vgl. Diplomarbeit Daniel Hofer [Hof08]).

## 5 Freifeldlösungen differenziert: Differenzielle Arrays und Richtungspolynome

Noch ohne ausführliche Theorie zur Schallfeldanalyse und -synthese können ebenen Wellen und Green'schen Funktionen mit kompakten Mikrofon- oder Lautsprecheranordnungen differenziert werden. Dabei ergeben sich mit Richtungspolynome ganz wichtige Werkzeuge zur Analyse und Synthese von Richtungen im Schallfeld.

Gary Elko zeigt in [Elk00, Elk04], wie man rotationssymmetrische Bündelungswirkungen von Mikrofonanordnungen systematisch entwerfen kann, in dem eine äquidistante Abtastung/Anregung des Schallfeldes erfolgt. Dieser Entwurf besitzt indirekt Ähnlichkeit zu superdirektivem MVDR-Beamforming, er ist der Audiotechnik aber wesentlich näher.

Eindimensionaler Richtwirkungsentwurf erscheint anfangs begrenzt, ja zwischendurch sogar technisch problematisch. Dennoch lernen wir am Ende viel und wenden später Theorie und Problemverständnis fast unverändert bei sphärischen Anordnungen an.

Wir werden erreichbare Vorteile und auftretenden Problembereiche bei noch recht einfacher Mathematik kennenlernen. Es bestünde zwar die Möglichkeit, mehrdimensionale differenzielle Anordnungen in kartesischen Koordinaten zu definieren, der Übergang auf sphärische Anordnungen bringt aber Ersparnisse.

### 5.1 Lineare Mikrofon- oder Lautsprecheranordnungen: ebene Wellen und Green'sche Funktionen örtlich abgeleitet

Wir nehmen eine lineare Anordnung von idealen Mikrofonen an, die im Abstand  $\Delta z$  zueinander auf der  $z$ -Achse angeordnet sind,  $\mathbf{r} = [0, 0, l \Delta z]^T$ , wobei  $l = 0, \dots, L - 1$ . Wenn eine ebene Welle  $p = g e^{ik\boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{r}}$  aus der Richtung  $\boldsymbol{\theta}_s = [\cos \varphi_s \sin \vartheta_s, \sin \varphi_s \sin \vartheta_s, \cos \vartheta_s]^T$  vorhanden ist, zeichnet das Mikrofon mit dem Index  $l$  den Schalldruck  $p_l$  auf

$$p_l = p(z - l\Delta z) = g e^{-ikl\Delta z \cos \vartheta_s}. \quad (118)$$

Bilden wir die Differenz zwischen den ersten beiden Mikrofonen  $p_0 - p_1$ , erhalten wir bei sehr kleinem Abstand  $\Delta z \ll k$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 - e^{-ik\Delta z \cos \vartheta_s} &= g - g \underbrace{\cos(k\Delta z \cos \vartheta_s)}_{\approx 1} + i g \underbrace{\sin(k\Delta z \cos \vartheta_s)}_{\approx k\Delta z \cos \vartheta_s} \\ &= g ik\Delta z \cos \vartheta_s. \end{aligned}$$

Diese Differenz nähert bis auf den einen linearen Faktor  $\Delta z$  den Gradienten an:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p(z) - p(z - \Delta z)}{\Delta z} = ik \cos \vartheta_s p(z),$$

sofern  $k\Delta z \approx \frac{6\Delta z}{\lambda} \ll 1$ , die Anordnung also kleiner als 1/6-Wellenlänge ist. Gradienten aller Ordnungen würden analytisch so aussehen  $\frac{\partial^n}{\partial z^n} p = (ik)^n \cos^n \vartheta_s p$  und könnten mit

einem Differenzenschema höherer Ordnung nachgebaut werden

$$(1 - e^{-ik\Delta z \cos \vartheta_s})^n = \sum_{l=0}^{L-1} (-1)^l \binom{n}{l} \underbrace{e^{ikl\Delta z \cos \vartheta_s}}_{=p_l} \approx (ik\Delta z)^n \cos^n \vartheta_s. \quad (119)$$

Dabei ist  $\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$  der Binomialkoeffizient. Um Richtwirkungen  $\cos^n \vartheta_s$  zu bekommen, können wir die Mikrofon-signale miteinander ausdifferenzieren nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 & (120) \\ \frac{p_0 - p_1}{ik\Delta z} &= \cos \vartheta_s \\ \frac{p_0 - 2p_1 + p_2}{(ik\Delta z)^2} &= \cos^2 \vartheta_s \\ \frac{p_0 - 3p_1 + 3p_2 - p_3}{(ik\Delta z)^3} &= \cos^3 \vartheta_s \\ &\dots \\ \frac{\sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{n!}{l!(n-l)!} p_l}{(ik\Delta z)^n} &= \cos^n \vartheta_s. \end{aligned}$$

Das selbe gelingt auch für Richtwirkungen einer linearen Anordnung von Green'schen Funktionen (in etwa: Lautsprecher). Örtlich differenziert erhalten wir im Fernfeld  $\lim_{kr \gg 1}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} G(r) = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} G(r) = \frac{z}{r} \left[ \frac{-ik e^{-ikr}}{r} - \frac{1}{r} \frac{e^{-ikr}}{r^2} \right] = -\cos \vartheta_s \left[ ik + \frac{1}{r} \right] G = -ik \cos \vartheta_s G.$$

Der Gradient  $\lim_{kr \gg 1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} G = G(-ik \cos \vartheta_s)^n$  lässt sich ebenfalls mit dem Differenzenschema nachbilden. Wir erzeugen die Richtwirkungen  $\cos^n \vartheta_s$  indem wir Green'sche Funktionen  $G_l = G(l\Delta z)$  wie zuvor kombinieren:

$$\begin{aligned} G_0 &= G_0 & (121) \\ \frac{-G_0 + G_1}{-ik\Delta z} &= G_0 \cos \vartheta_s \\ \frac{G_0 - 2G_1 + G_2}{(-ik\Delta z)^2} &= G_0 \cos^2 \vartheta_s \\ \frac{-G_0 + 3G_1 - 3G_2 + G_3}{(-ik\Delta z)^3} &= G_0 \cos^3 \vartheta_s \\ &\dots \\ \frac{\sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \frac{n!}{l!(n-l)!} G_l}{(-ik\Delta z)^n} &= G_0 \cos^n \vartheta_s. \end{aligned}$$

Damit die Näherung des Gradienten höherer Ordnung stimmt, muss die gesamte Anordnung kleiner als  $\frac{1}{6}$  Wellenlänge sein, also  $\frac{\Delta z}{\lambda} \ll \frac{1}{6N}$ .

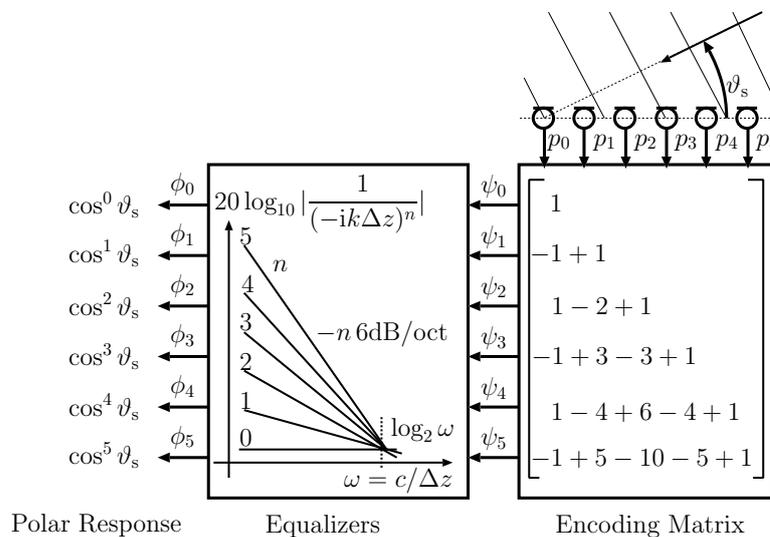


Abbildung 19 – Blockschaltbild einer differentiellen Mikrofonzeile.

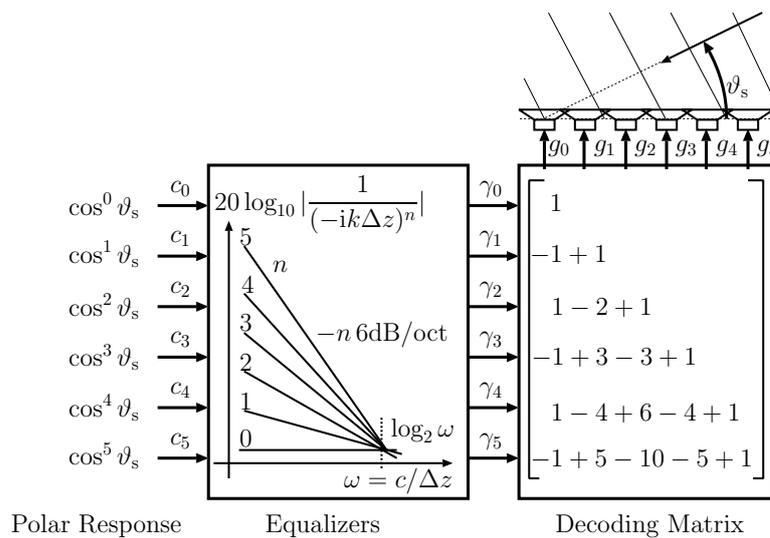


Abbildung 20 – Blockschaltbild einer differentiellen Lautsprecherzeile.

## 5.2 Richtwirkungsentwurf mit Polynomen

Wir sind nun in der Lage, durch eine frequenzunabhängige Matrizierung und eine leichtverständliche, aber für hohe Ordnungen steile, Filterung Richtwirkungen der Form  $\cos^2 \vartheta_s$  zu erzeugen. Interessant ist für uns nun, Koeffizienten  $c_n$  für eine günstige Zusammensetzung einer Richtfunktion  $g$  zu finden. Wir ersetzen zur Vereinfachung  $\mu = \cos \vartheta_s$  und erhalten das Polynom als Richtfunktion:

$$g(\mu) = \sum_{n=0}^N c_n \mu^n. \quad (122)$$

**Maximalflache Nullstelle bei  $180^\circ$ .** Die einfachste Richtfunktion hat eine  $n$ -fache Nullstelle bei  $180^\circ$  und wird eins bei  $0^\circ$ , also  $g(\mu)|_1 = 1$  und  $\frac{\partial^i}{\partial \mu^i} g(\mu)|_{-1} = 0$  für  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . *Butterworth-, Potenzentwurf oder Niere höherer Ordnung:*

$$g(\mu) = (\mu + 1)^N / 2^N, \quad \Rightarrow c_n = \frac{N!}{2^N n! (N-n)!}. \quad (123)$$

**Nebenkeulen vorgegebener Höhe.** Tschebyschow-Polynome  $T_n(\mu)$ , siehe Tabelle 1, haben die Eigenschaft, aus einem Argument  $\mu = \cos \alpha$  das Ergebnis  $\cos n\alpha$  erzeugen. Argumente zwischen -1 und +1 werden auf den Wertebereich -1 bis +1 mit  $n$  Nullstellen abgebildet. Über 1 hinaus ausgewertet, steigt der Wert proportional zu  $\mu^n$  an. Ähnlich dem klassischen Filterentwurf beschreiben Elko [Elk00, Elk04] die Technik zum Richtwirkungsentwurf

$$g(\mu) = \frac{1}{T_N(1 + \alpha)} T_N[\mu(1 + \frac{\alpha}{2}) + \frac{\alpha}{2}]. \quad (124)$$

$T_n(\mu) = \sum_{i=0}^n c_i \mu^i$ Koeffizienten der Tschebyschow-Polynome										
$n =$	$c_9$	$c_8$	$c_7$	$c_6$	$c_5$	$c_4$	$c_3$	$c_2$	$c_1$	$c_0$
0										1
1									1	
2								2		-1
3							4		-3	
4						8		-8		1
5					16		-20		5	
6				32		-48		18		-1
7			64		-112		56		-7	
8		128		-256		160		-32		1
9	256		-576		432		-120		9	

Tabelle 1 – Koeffizienten der Tschebyschow-Polynome, die bei Integration über das Intervall  $[-1, 1]$  mit dem Integrationselement  $\frac{d\mu}{\sqrt{1-x^2}}$  orthogonal sind.

**Maximaler Richtfaktor.** Wünschen wir  $g(1) = 1$  und ein energetisch minimales Aufnahmepattern zu allen anderen Richtungen, ist durch die Minimierungsaufgabe definiert:

$$\min \int_{-1}^1 g(\mu)^2 d\mu$$

Nebenbed.  $g(1) = 1$ .

Leichter geht die Minimierung, indem man anstelle der Potenzen orthogonale Polynome ansteigenden Grades verwendet. Das Integral über zwei dieser Polynome verschwindet, wenn ihr Grad sich unterscheidet. Auf dem Intervall  $[-1, 1]$  sind Legendre-Polynome, siehe Tabelle 2, orthogonal  $\int_{-1}^1 P_n(\mu)P_{n'}(\mu)d\mu = \frac{2\delta_{nn'}}{2n+1}$ . Wir setzen die Richtfunktion damit an

$$g(\mu) = \sum_{n=0}^N \hat{c}_n P_n(\mu). \tag{125}$$

Im Anhang wird diese Minimierungsaufgabe durchgeführt, und es ergibt ein maximaler

$P_n(\mu) = \sum_{i=0}^n c_i \mu^i$  Koeffizienten der Legendre-Polynome

$n =$	$c_9$	$c_8$	$c_7$	$c_6$	$c_5$	$c_4$	$c_3$	$c_2$	$c_1$	$c_0$
0										1
1									1	
2								$\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$
3							$\frac{5}{2}$		$-\frac{3}{2}$	
4						$\frac{35}{8}$		$-\frac{30}{8}$		$\frac{3}{8}$
5					$\frac{63}{8}$		$-\frac{70}{8}$		$\frac{15}{8}$	
6				$\frac{231}{16}$		$-\frac{315}{16}$		$\frac{105}{16}$		$-\frac{5}{16}$
7			$\frac{429}{16}$		$-\frac{693}{16}$		$\frac{315}{16}$		$-\frac{35}{16}$	
8		$\frac{6435}{128}$		$-\frac{12012}{128}$		$\frac{6930}{128}$		$-\frac{1260}{128}$		$\frac{35}{128}$
9	$\frac{12155}{128}$		$-\frac{25740}{128}$		$\frac{18018}{128}$		$-\frac{4620}{128}$		$\frac{315}{128}$	

Tabelle 2 – Koeffizienten der Legendre-Polynome, die bei Integration über das Intervall  $[-1, 1]$  mit dem Integrationselement  $d\mu$  orthogonal sind.

Richtfaktor  $\frac{2}{\int g^2 d\mu}$  für die Koeffizienten

$$\hat{c}_n = \frac{2n + 1}{(N + 1)^2}. \tag{126}$$

**Maximaler Schwerpunkt ( $r_E$ ).** Der Schwerpunkt des quadrierten Richtmusters entlang seiner Rotationsachse bestimmt sich durch  $\int_{-1}^1 \mu g(\mu)^2 d\mu / \int_{-1}^1 g(\mu)^2 d\mu$ . Er lässt sich maximieren

$$\max \frac{\int_{-1}^1 \mu g(\mu)^2 d\mu}{\int_{-1}^1 g(\mu)^2 d\mu} \tag{127}$$

Jérôme Daniel [Dan00] bezeichnet das für Ambisonics als  $\text{max-}r_E$ . Die Herleitung im Anhang verwendet das Rekurrenzschema  $\mu P_n(\mu) = \frac{1}{2n+1} [n P_{n-1}(\mu) + (n+1) P_{n+1}(\mu)]$ . Sie ergibt

$$r_E = \arg \max [P_{N+1}(\mu) = 0] \approx \cos \left( \frac{137.9^\circ}{N + 1.51} \right), \quad \hat{c}_n = \frac{2n+1}{2} P_n(r_E), \quad (128)$$

und sie entspricht für  $n = 1$  der Superniere. Dieses Muster ist vor allem als Richtmuster bei Ambisonics und kugelförmigen Rundaufnahme praxisrelevant und wird aufgrund seiner günstigen Eigenschaften gerne bevorzugt.

**Zusammenfassung wichtiger Richtmusterentwürfe:** Die oben vorgestellten Richtwirkungsentwürfe sind in Abbildung 21 zusammengefasst. Davon besitzt die Richtwirkung mit maximalflacher Auslöschung die breiteste Hauptkeule und keine Nebenkeulen. Alle anderen Richtmuster weisen  $N$  Nullstellen auf und Nebenkeulen. Bei der Tschebyschow-Richtwirkung ist die Nebenkeulenhöhe einstellbar und einheitlich, und in der Praxis ist das Richtmuster mit dem maximierten Schwerpunkt in Ambisonics recht beliebt.

Freilich gibt es noch andere wichtige Entwürfe, wovon auf jeden Fall noch das maximierte vorne-zu-hinten Energieverhältnis, die Verallgemeinerung der Superniere, zu nennen ist. In Anwendungen, die nur Gewichtung von Legendrepolyomen erlauben, ist eine Umrechnung der Koeffizienten nötig, die hier aber nicht weiter besprochen wird, siehe [Zot09a].

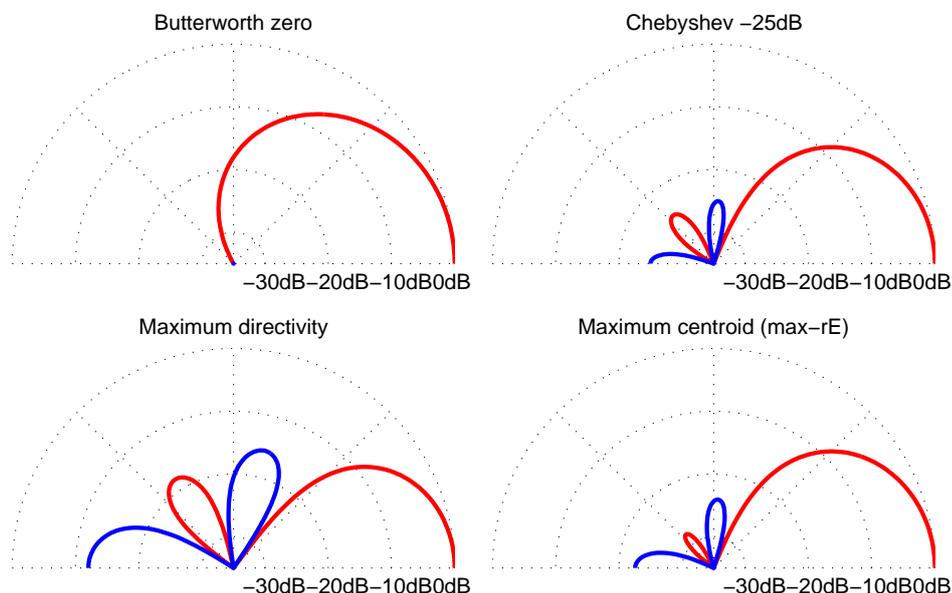


Abbildung 21 – Einige Richtmusterentwürfe für die Ordnung  $N = 3$ .

### 5.3 Relative Fehler bei realistischer Kalibrierengenauigkeit

Realistische Mikrofon/Lautsprecheranordnungen haben stets ihre kleinen Fehler. Erstens funktionieren sie für große Frequenzen nicht mehr, zweitens treten durch  $\frac{1}{(ik\Delta z)^n}$  zum Teil sehr große Verstärkungen auf. Pro Oktave tiefer und pro Ordnung 6dB. Aber auch das Differenzierungsschema für die Differenzen höherer Ordnung benötigt eine große Dynamik. Die Konditionszahl der Differentiationsmatrix zeigt, dass Fehler pro Ordnungsvergrößerung um jeweils 8.4dB mehr verstärkt werden.

Die Grenze für die unzureichende Approximation des Gradienten bei hohen Frequenzen ergibt sich aus  $kN\Delta z = 1$  zu

$$f_{\text{og}} = \frac{c}{2\pi N\Delta z} \approx \frac{50}{N\Delta z}.$$

Die Konditionszahl, und damit die Fehlerverstärkung des Gesamtsystems, setzt sich grob betrachtet zusammen aus:

$$\kappa(N, f) = N \left[ 8.4\text{dB} + \log_2 \left( \frac{f_0}{f} \right) 6\text{dB} \right],$$

wobei wir  $f_0$  angeben als jene Frequenz, bei welcher  $k\Delta z = 1$ , also  $f_0 = \frac{c}{2\pi\Delta z} \approx \frac{50}{\Delta z}$ .

Wir können nun eine untere Grenzfrequenz  $f_{\text{ug}}$  anhand der möglichen Ungenauigkeit bei der Abstimmung der Mikrofone angeben. Sollten sich die Verstärkungsfaktoren zweier Mikrofone um die  $a$ -te Nachkommastelle von 1 unterscheiden, so erhalten wir bei gleichem Schalldruck statt einer Auslöschung  $p_1 - p_0 = 0$  mit  $-\infty$  dB einen Fehler, der relativ zu einem möglichen Nutzsignal mit Einheitsamplitude bloß um  $-20 a$  dB gedämpft ist. Damit erhalten wir als untere Frequenzgrenze  $f_{\text{ug}} = \arg_f [\kappa(N, f) = 20 a]$ . Die nutzbare Bandbreite ergibt sich in Oktaven nach Auflösung der Gleichung

$$\log_2 \frac{f_{\text{og}}}{f_{\text{ug}}} = \frac{20 a}{6N} - \log_2 N - \frac{8.4}{6}. \quad (129)$$

Für eine Kalibrierung, die 2 Nachkommastellen genau ist,  $a = 2$ , und unter der Annahme präziser Positionierung der Mikrofone, ergibt sich für  $N = 1$  ein nutzbarer Bereich von 5 Oktaven, für  $N = 2$  eine Oktave und  $N = 3$  ist nicht mehr auflösbar.

Diese praktische Herausforderung differenzieller Anordnungen wird heutzutage nur durch kugelförmigen Anordnungen besser gemeistert, welche zudem erlauben, die selben Ansätze zur Gestaltung von Richtmustern bei freier Ausrichtung zu verwenden.

Zur Ergänzung muss dazugesagt sein, dass Delay-and-Sum-Beamformer noch  $\log_2(3N)$  Oktaven über der angegebenen oberen Frequenzgrenze verwendet wird, weil die obere Frequenzgrenze der Abtastung keine  $6N$ -malige Abtastung der Wellenlänge erfordert, sondern bloß doppelte. Solche Beamformer werden bei tiefen Frequenzen nicht instabil, erreichen unter ihrer Abtastfrequenzgrenze aber nur schwer vergleichbare Richtwirkungen, es sei denn die Gesamtabtastung und Mikrofonanzahl wird erhöht. Wir werden bei der praktischen Messung des Wellenspektrums auf Eigenschaften von Delay-and-Sum-Beamformern stoßen.

## 5.4 Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen

Trotz der nicht gerade aussichtsreichen Anwendbarkeit durch Genauigkeitsprobleme, soll hier eine Möglichkeit zur Verallgemeinerung auf mehrdimensionale Richtkeulenformung veranschaulicht werden. Multipolrichtwirkungen entstehen durch  $i$ -,  $j$ -, und  $l$ -fache Ableitung eines Monopols (Green'sche Funktion) in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \frac{\partial^l}{\partial z^l} G = (-ik)^{i+j+l} \left(\frac{x}{r}\right)^i \left(\frac{y}{r}\right)^j \left(\frac{z}{r}\right)^l G = (ik)^{i+j+l} \theta_x^i \theta_y^j \theta_z^l G. \quad (130)$$

Auf eine ebene Welle aus der Richtung  $\theta_s$  angewendet erhalten wir ganz Ähnliches:

$$g \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \frac{\partial^l}{\partial z^l} e^{ik \theta_s^T r} = g (ik)^{i+j+l} \theta_{s,x}^i \theta_{s,y}^j \theta_{s,z}^l e^{ik \theta_s^T r}. \quad (131)$$

Für dreidimensionale differenzielle Arrays ist daher angebracht, eine Anordnung von Mikrofonen in alle 3 kartesische Koordinatenrichtungen zu verwenden. Für eine Anordnung, die alle Differenzen bis zur Ordnung  $i + j + l \leq N$  berechnet, sind insgesamt  $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$  Mikrofone an den Stellen  $(x + i\Delta x, y + j\Delta y, z + l\Delta z)$  nötig, und es ergeben sich ebensoviele Richtmuster. In dieser Verallgemeinerung ist es möglich, zuvor beschriebene Richtmuster in jede beliebige Raumrichtung auszurichten.

Nur verwendet die Darstellung eigentlich zu viele, daher nicht mehr orthogonale Richtmuster. Das sehen wir bereits in der zweiten Ordnung, wenn wir die Multipolrichtwirkungen von  $(i, j, l) = (2, 0, 0)$ ,  $(i, j, l) = (0, 2, 0)$  und  $(i, j, l) = (0, 0, 2)$  linear kombinieren: Das entstehende Muster  $\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 = 1$  entspricht dem konstanten Muster der nullten Ableitung  $(i, j, l) = (0, 0, 0)$ .

Sphärische Anordnungen sind nicht nur aufgrund ihrer geringeren Genauigkeitserfordernisse besser, sondern auch, weil sie nur  $(N + 1)^2$  Kugelflächenfunktionen verwenden, die eine orthogonale Basis für alle beliebig ausgerichteten Richtmuster  $N$ -ter Ordnung sind. Sphärische und lineare differentielle Arrays sind dennoch gut befreundet: Kugelanordnungen verwenden die Richtmusterwürfe aus diesem Abschnitt, und sie verwenden trotz der etwas günstigeren Ausgangslage Frequenzgänge ähnlicher Gestalt.

## 5.5 Ambisonisches Amplitudenschwenken leicht gemacht: optimale Abtastung eindimensionaler Richtfunktionen

Eine technisch-holografische Sichtweise über Ambisonics wird später noch genauer entwickelt. Sie ist aber für die praktische Umsetzung nicht unbedingt das größte Ziel, weil unser Gehör nicht auf die Einschränkungen technisch exakt reproduzierter Schallfelder angewiesen ist.

So reicht oft schon aus, ein Signal durch geeignete Amplitudengewichte auf Lautsprecher zu schicken, um Hörereignisse aus möglichst glatt einstellbarer Richtung hervorzurufen.

Das aus Ville Pulkkis Arbeit [Pul97] (und älteren Arbeiten) geläufige Maß für die breit-

bandige Lautstärke ist, siehe auch [Ger92],

$$E = \sum_{l=1}^L g_l^2. \quad (132)$$

Einige neuere Arbeiten zur Psychoakustik von Phantomschallquelle mehrerer Lautsprecher räumen dem vektoriellen Schwerpunktsmaß der Lautsprechergewichte [Ger92]

$$\mathbf{r}_V = \frac{\sum_{l=1}^L g_l \boldsymbol{\theta}_l}{\sum_{l=1}^L g_l} \quad (133)$$

und jenem der quadrierten Lautsprechergewichte [Ger92]

$$\mathbf{r}_E = \frac{\sum_{l=1}^L g_l^2 \boldsymbol{\theta}_l}{\sum_{l=1}^L g_l^2} \quad (134)$$

ein, experimentelle perzeptive Ergebnisse gut vorhersagen zu können.

Abseits des Wissens, dass die Summe der quadrierte Gewichte mit der empfundenen Lautstärke stark korreliert, wissen wir aus den systematischen Untersuchungen in der Dissertation von Matthias Frank [Fra13], dass das vektorielle Schwerpunktsmaß  $\mathbf{r}_E$  der quadrierten Lautsprechergewichte relevant ist. Insbesondere die Länge des  $\mathbf{r}_E$ -Vektors ist mit der empfundenen Breite von Hörereignissen korreliert und seine Richtung mit der wahrgenommenen Richtung. Weiters hat sich früh gezeigt, dass das Richtmuster mit dem maximierten Schwerpunktsmaß  $r_E$ , siehe Gl. (128) u. Jérôme Daniel [Dan00], für die Wahrnehmung günstig ist [Fra08]. Aus der Arbeit von Florian Wendt [Wen13] zur systematischen Untersuchung von Phantomschallquelle vertikaler Lautsprecherordnungen scheint auch das Maß  $r_V$  interessant zu sein. Der Konferenzbeitrag von Sebastian Braun [BF11] zeigt bereits experimentell an, dass auch die vertikale Steuerung von Hörereignissen in der 3D Ambisonik gut funktioniert.

Das Schöne an Ambisonics ist, dass es in der Lage ist, all diese Maße unabhängig von der Schwenkrichtung  $\boldsymbol{\theta}_s$  mit konstantem Betrag / richtiger Ausrichtung zu erzeugen:

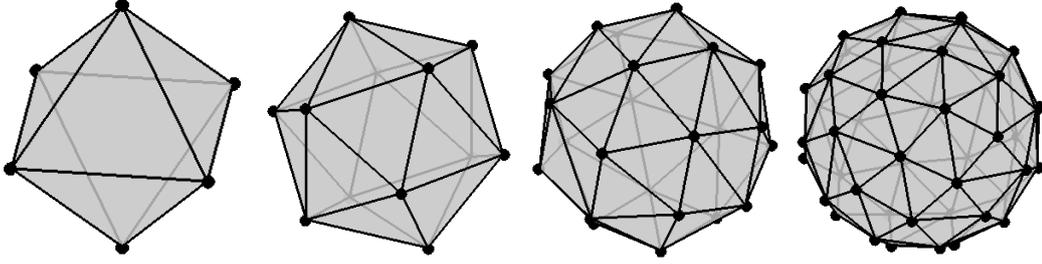
$$E = \text{const.}, \quad \mathbf{r}_V = r_V \boldsymbol{\theta}_s, \quad \mathbf{r}_E = r_E \boldsymbol{\theta}_s. \quad (135)$$

Dazu ist allerdings notwendig, passende Lautsprecheranordnungen zu verwenden.

Ambisonics kann vereinfacht durch kontinuierliche Panningfunktionen dargestellt werden

$$g(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_s) = \sum_{n=0}^N \hat{c}_n P_n(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_s), \quad (136)$$

die später an den Orten der Lautsprecher  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_l$  diskretisiert werden soll. Im Artikel [ZF12] gelang es erstmals zu zeigen, welche Lautsprecheranordnungen optimal sind. So-genannte sphärische *t-designs* erlauben eine optimale Abtastung sphärischer Polynome. Solche Polynome sind gewöhnliche Polynome gegebenen Grades, nur, dass ihr Argument  $\mu = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_s$  durch ein Inprodukt von Richtungsvektoren definiert wird, von welchen

Abbildung 22 –  $t$ -designs:  $t = 3$ (octahedron),  $5$ (icosahedron),  $7, 9$ .

$\boldsymbol{\theta}$  variabel und frei ist und  $\boldsymbol{\theta}_s$  beliebig voreingestellt. Genau so ein Polynom des Grades  $N$  ist die kontinuierliche Panningfunktion  $g(\boldsymbol{\theta})$ .

$t$ -designs erlauben die Ersetzung eines Integrals über diesen variablen Vektor durch eine diskrete Summe: Jedes  $t$ -design besteht aus einem Satz von  $L$  Punkten  $\{\boldsymbol{\theta}_l\}$  der Einheitskugel, und es erlaubt die Ersetzung des Integrals über ein beliebiges sphärisches Polynom des Grades  $t$  durch die diskrete Summe

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{P}_t(\boldsymbol{\theta}_s^T \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \frac{4\pi}{L} \sum_{l=1}^L \mathcal{P}_t(\boldsymbol{\theta}_s^T \boldsymbol{\theta}_l). \quad (137)$$

Um die kontinuierlichen Panningfunktionen möglichst gut mit Lautsprechern darzustellen, gilt es den Parameter  $t$  der  $t$ -designs so festzulegen, dass für  $\hat{E}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_V$  und  $\hat{\mathbf{r}}_E$  die optimalen, alleine durch  $\hat{c}_n$  bestimmten, Werte der kontinuierlichen Integrale bei der Diskretisierung erhalten bleiben:

$$\hat{E} = \int_{\mathbb{S}^2} g^2(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = 2\pi \int_{-1}^1 g^2(\mu) d\mu = 4\pi \sum_{n=0}^N \frac{\hat{c}_n^2}{2n+1}, \quad (138)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_V = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{\theta}^T g(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}{\int_{\mathbb{S}^2} g(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} = \frac{\int_{-1}^1 \mu g(\mu) d\mu}{\int_{-1}^1 g(\mu) d\mu} \boldsymbol{\theta}_s = \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_0} \boldsymbol{\theta}_s, \quad (139)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_E = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{\theta}^T g(\boldsymbol{\theta})^2 d\boldsymbol{\theta}}{\int_{\mathbb{S}^2} g^2(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} = \frac{\int_{-1}^1 \mu g(\mu)^2 d\mu}{\int_{-1}^1 g^2(\mu) d\mu} \boldsymbol{\theta}_s = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{(n+1)\hat{c}_n\hat{c}_{n-1}}{2n+1}}{\sum_{n=0}^N \frac{\hat{c}_n^2}{2n+1}} \boldsymbol{\theta}_s. \quad (140)$$

Erhalt des Integralwerts von  $\hat{\mathbf{r}}_V$  erfordert  $t \geq N + 1$ , weil das Polynom  $\sum_{n=0}^N \hat{c}_n \mu P_n(\mu)$  unter dem Integral den Grad  $N+1$  besitzt. Für  $\hat{E}$ , muss  $t \geq 2N$  gelten, weil das Polynom  $\sum_{n \leq N, n' \leq N} \hat{c}_n \hat{c}_{n'} P_n(\mu) P_{n'}(\mu)$  unter dem Integralzeichen den Grad  $2N$  besitzt. Für korrekten  $\hat{\mathbf{r}}_E$ -Vektor muss  $t \geq 2N + 1$  sein, da über  $\sum_{n \leq N, n' \leq N} \hat{c}_n \hat{c}_{n'} \mu P_n(\mu) P_{n'}(\mu)$  integriert wird.

Die Grafik Abb. 22 zeigt mögliche Anordnungen für ambisonisches Amplitudenpanning der Ordnungen  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ .

## 6 Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten

Die umfassenden Beschreibungen der in den Abschnitten zuvor fußen auf dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral und besitzen oftmals aufwändige/ungünstige Darstellungen physikalischer Felder, wenngleich sich durch Faltungssätze und Fernfeldnäherungen unphysikalische ebene Wellen in einfacher Weise zur Berechnung korrekter Ergebnisse eignen.

Im gekrümmten Kugelkoordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ergeben sich im Wesentlichen zwei Unterscheidungsbereiche: außen und innen. Wird das Rechnen mit physikalischen Darstellungen angestrebt, sind diese entweder zur Einforderung der Ausstrahlungsbedingung, oder eines homogenen, endlichen Schallfeldes geeigneter.

Wie Abbildung 23 zeigt, sind diese zwei Grundtypen einerseits das sog. *innere Problem*, dessen Schallfeld bis zu einem Radius hin quellenfrei und endlich bleiben muss, und andererseits das *äußere Problem*, welches außerhalb eines Radius homogen und quellenfrei ist, sowie die Ausstrahlungsbedingung einhalten muss, siehe Gl. (77).

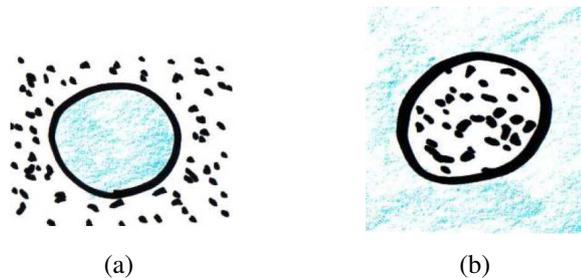


Abbildung 23 – a) Inneres und b) äußeres Problem

Für beide dieser Typen wird nun gezeigt, wie die Lösungen der verlustlosen Wellengleichung, der Helmholtzgleichung, gefunden werden.

## 6.1 Ableitungsoperatoren in nichtkartesischen Koordinatensystemen

Ganz allgemein können zwei Koordinatensysteme durch ein  $n$ -tupel an Werten ausgedrückt werden. Nehmen wir an, wir haben das kartesische  $(x_1, x_2, \dots)$  und ein anderes Koordinatensystem  $(u_1, u_2, \dots)$  zum Beschreiben eines Punktes im beliebigdimensionalen Raum. Jeder Raumpunkt sollte in beiden Systemen erreichbar sein und eine umkehrbare Abbildungen dazwischen existieren, z.B.  $u_j = u_j(x_1, x_2, \dots)$ . Eine einzelne Ableitung, sagen wir nach der Komponente  $x_i$ , lässt sich über die Kettenregel durch eine Summe gewichteter Ableitungen nach  $u_j$  ausdrücken:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (141)$$

Vektoriell geschrieben werden Ableitungen des Gradienten  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  mit  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}$  zu:

$$\nabla = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} := \mathbf{J}_{\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}, \quad (142)$$

wobei die allgemein von  $\mathbf{x}$  oder  $\mathbf{u}$  abhängige Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_{\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{ij}$  alle partiellen Ableitungen der Umrechnungsvorschrift enthält. Es gibt sie auch für die Umkehrvorschrift  $\mathbf{J}_{\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{u}} = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right]_{ji}$ . Vollwertig ist das Koordinatensystem  $u_j$  aber nur, wenn die Determinante überall verschieden von null ist  $|\mathbf{J}| \neq 0$ .

Bei orthogonalen Koordinatensystemen ist  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  eine Diagonalmatrix. Mit  $\mathbf{J}_{\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{u}}$  ist das leicht zu sehen: die differentielle Ortsänderungen  $\partial \mathbf{x} / \partial u_j$  jeder nichtkartesischen Koordinate  $u_j$  bilden im Raum ein orthogonales Koordinatenkreuz, das abhängig vom Ort freie Ausrichtung und Schenkellängen haben darf.

Viel interessanter als der Gradient ist der Laplace-Operator; er ist allgemein  $\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  und mit der Kettenregel (jetzt von  $x_i$  nach  $u_j$  gerechnet)

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}, \end{aligned} \quad (143)$$

$$\text{wobei } \sum_{i,j,k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^T} \underbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{J}}_{\text{ortho: diag}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_j^2} \right].$$

Die Verwendung orthogonaler Koordinatensysteme vereinfacht ihn stark (letzte Zeile), sodass er bloß aus einfachen und sortenreinen doppelten Ableitungen des neuen Koordinatensystems besteht. Beide sind mit den partiellen Ableitungen der Koordinaten gewichtet. Für jedes  $u_j$  gibt es im Laplace-Operator einen Summenterm

$$\Delta = \sum_j \Delta_{u_j}, \quad \text{wobei } \Delta_{u_j} = \left[ \sum_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \right] \frac{\partial}{\partial u_j} + \left[ \sum_i \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}. \quad (144)$$

## 6.2 Helmholtzgleichung des $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten

In drei räumlichen Dimensionen hat das Kugelkoordinatensystem abgesehen vom Radius zwei Winkel, den Azimutwinkel  $\varphi$ , der auf der Projektion auf die  $xy$ -Ebene gegen den Uhrzeigersinn den Abstand zur  $x$ -Achse angibt, und den Zenitwinkel  $\vartheta$ , der den Winkel zur  $z$ -Achse misst.

### 6.2.1 Kugelkoordinaten

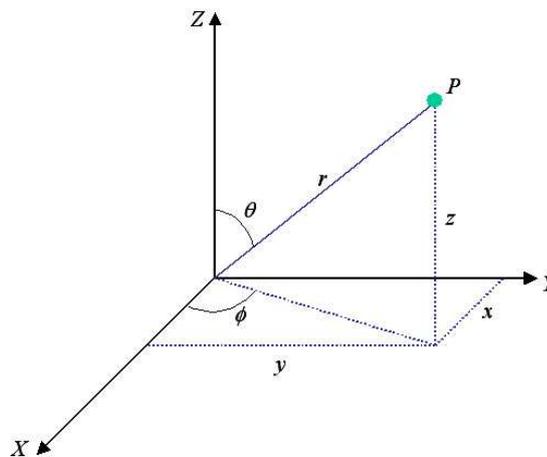


Abbildung 24 – Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi \sin \vartheta & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 y &= r \sin \varphi \sin \vartheta & \varphi &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \\
 z &= r \cos \vartheta & \vartheta &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\
 x, y, z &\in [-\infty, \infty] & r &\in [0, \infty], \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]
 \end{aligned}$$

### 6.2.2 Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Bei der Berechnung des Laplace-Operators Kugelkoordinaten ergibt sich, vgl. Anhang H,

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (145)$$

Durch den Separationsansatz

$$p(r, \varphi, \vartheta) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\vartheta) \quad (146)$$

lässt sich die Helmholtzgleichung in drei gewöhnliche DGLn überführen, vgl. Anhang J,

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu^2\Phi = 0, \quad (147)$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\vartheta} \right] \Theta = 0, \quad (148)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} R = 0. \quad (149)$$

### 6.2.3 Lösung der DGL in $\varphi$ , Glg. (147)

Für die Lösung im Azimutwinkel ergibt sich

$$\Phi(\varphi) = A \sin(m\varphi) + B \cos(m\varphi), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (150)$$

### 6.2.4 Lösung der DGL in $\vartheta$ , Glg. (148)

Diese DGL wird als *zugeordnete Legendre'sche* DGL bezeichnet und kann in die Hypergeometrische DGL umgeformt werden

$$z(1-z) \frac{d^2w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0.$$

Lösungen:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(z) &= F(a; b; c; z) \\ u^{(1)}(z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a; b; a+b+1-c; 1-z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a; c-b; 1+c-a-b; 1-z), \end{aligned}$$

die Gauß'sche hypergeometrische Funktion

$$F(a; b; c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s z^s}{(c)_s s!}, \quad |z| < 1 \wedge c \notin \mathbb{Z}^- \quad (151)$$

dabei sind  $(a)_s$ ,  $(b)_s$  und  $(c)_s$  steigende Faktorielle (*Pochhammer-Symbol*), mit der Definition

$$(a)_0 \equiv 1, \quad (a)_s \equiv \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+s-1), \quad s \in \mathbb{Z}^+, \quad (152)$$

wobei die Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re\{z\} > 0. \quad (153)$$

Durch Rücksubstitution erhält man

$$P_\nu^\mu(\cos \vartheta) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{1+\cos \vartheta}{1-\cos \vartheta} \right)^{\frac{\mu}{2}} F \left( -\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-\cos \vartheta}{2} \right), \quad (154)$$

$$Q_\nu^\mu(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} \Gamma(\mu) \cos(\mu\pi) \left( \frac{1+\cos \vartheta}{1-\cos \vartheta} \right)^{\frac{\mu}{2}} F \left( -\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-\cos \vartheta}{2} \right) \quad (155)$$

$$+ \frac{1}{2} \Gamma(-\mu) \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)} \left( \frac{1-\cos \vartheta}{1+\cos \vartheta} \right)^{\frac{\mu}{2}} F \left( -\nu, 1+\nu; 1+\mu; \frac{1-\cos \vartheta}{2} \right),$$

$$\Theta(\vartheta) = CP_\nu^\mu(\cos \vartheta) + DQ_\nu^\mu(\cos \vartheta). \quad (156)$$

Die Lösungen  $P_\nu^\mu(\cos \vartheta)$  und  $Q_\nu^\mu(\cos \vartheta)$  werden als zugeordnete Legendre-Funktionen der 1. und 2. Art bezeichnet und ergeben sich wie folgt:

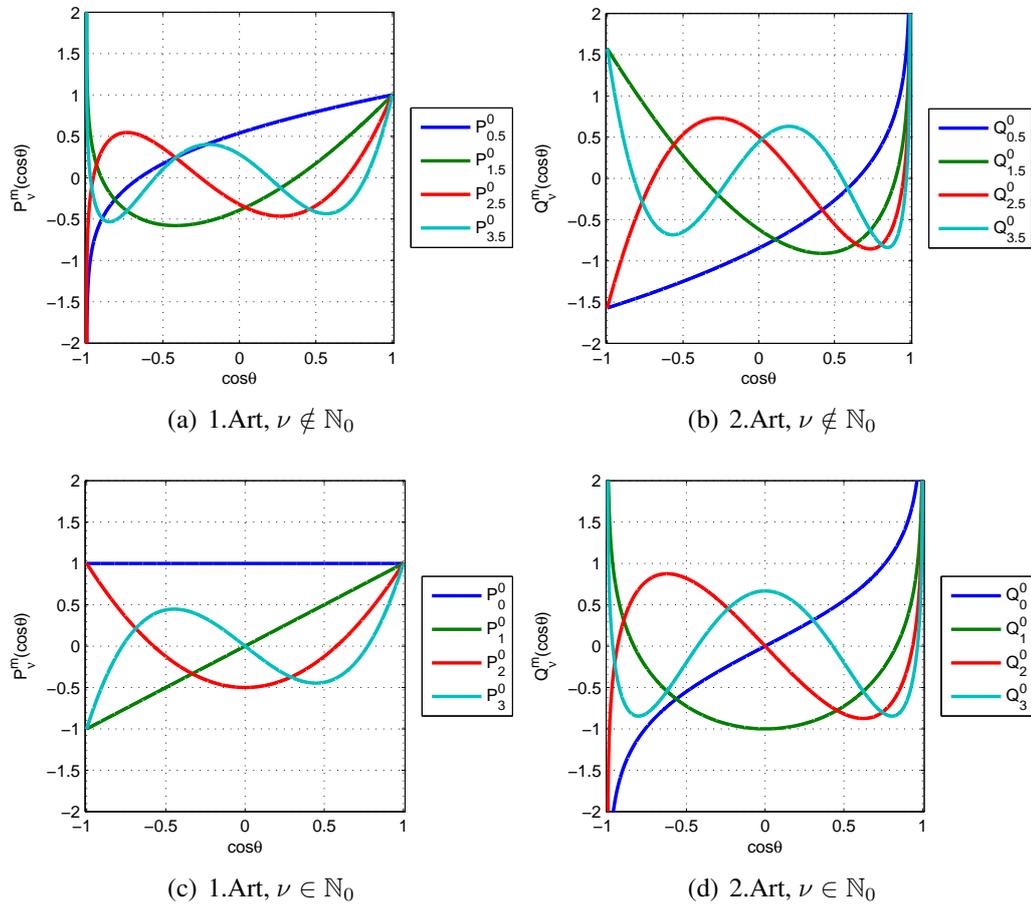


Abbildung 25 – zugeordnete Legendre-Funktionen

Physikalisch sinnvoll sind nur Lösungen bei denen der Schalldruck endliche Werte annimmt, daher  $|\Theta(\vartheta)| < \infty$ , d.h.  $\nu = n \in \mathbb{N}_0$ , vgl. Abb. 25. Damit ergibt sich für Lösungen in  $\vartheta$

$$\Theta(\vartheta) = CP_n^m(\cos \vartheta) \quad (157)$$

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  bricht die hypergeometrische Reihe in  $P_n^m(\cos \vartheta)$  für Potenzen  $s > n$  ab, man bezeichnet diese Funktionen auch als zugeordnete Legendre-Polynome:

$$P_0^0(\cos \vartheta) = 1$$

$$P_1^0(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$$

$$P_1^1(\cos \vartheta) = -\sin \vartheta$$

$$P_2^0(\cos \vartheta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

$$P_2^1(\cos \vartheta) = -3 \cos \vartheta \sin \vartheta$$

$$P_2^2(\cos \vartheta) = 3 \sin^2 \vartheta$$

$$P_3^0(\cos \vartheta) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$$

$$P_3^1(\cos \vartheta) = -\frac{3}{2}(5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta$$

$$P_3^2(\cos \vartheta) = 15 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta$$

$$P_3^3(\cos \vartheta) = -15 \sin^3 \vartheta$$

$$P_4^0(\cos \vartheta) = \frac{1}{8}(35 \cos^4 \vartheta - 30 \cos^2 \vartheta + 3)$$

$$P_4^1(\cos \vartheta) = -\frac{5}{2}(7 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) \sin \vartheta$$

$$P_4^2(\cos \vartheta) = \frac{15}{2}(7 \cos^2 \vartheta - 1) \sin^2 \vartheta$$

$$P_4^3(\cos \vartheta) = -105 \cos \vartheta \sin^3 \vartheta$$

$$P_4^4(\cos \vartheta) = 105 \sin^4 \vartheta$$

⋮

### Rekurrenzbeziehungen

$$P_0^0(\xi) = 1$$

$$P_n^n(\xi) = -(2n-1) P_{n-1}^{n-1}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z} : n > 0$$

$$P_n^{n-1}(\xi) = (2n-1) \xi P_{n-1}^{n-1}(\xi) \quad \forall n \in \mathbb{Z} : n > 0$$

$$(n-m) P_n^m(\xi) = (2n-1) \xi P_{n-1}^m(\xi) - (n+m-1) P_{n-2}^m(\xi) \\ \forall n, m \in \mathbb{Z} : n \geq 3; 0 \leq m \leq n-2$$

### 6.2.5 Lösung der DGL in $r$ , Glg. (149)

Allgemeine Lösung, vgl. Appendix K

$$R(r) = E j_n(kr) + F y_n(kr) \quad (158)$$

mit  $j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$  und  $y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Y_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ . Die Funktionen  $j_n(kr)$ ,  $y_n(kr)$  werden als sphärische Bessel- bzw. Neumann-Funktionen bezeichnet. Die radiale

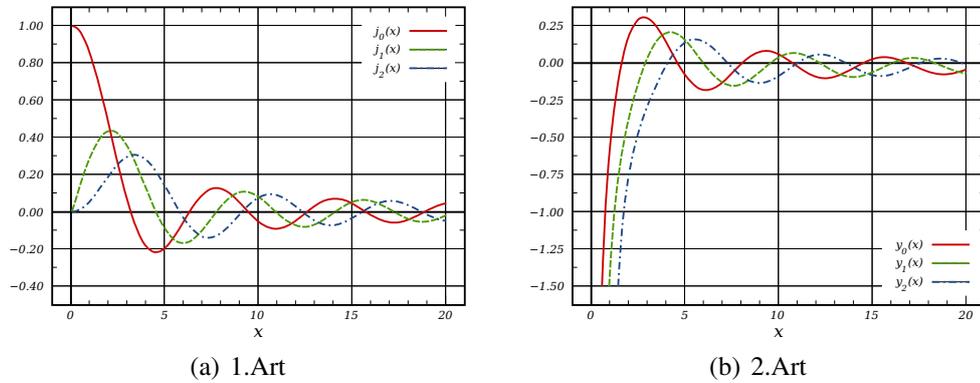


Abbildung 26 – sphärische Bessel-Funktionen

Lösung kann alternativ wieder mit komplexwertigen Funktionen dargestellt werden

$$R(r) = \tilde{E} h_n^{(1)}(kr) + \tilde{F} h_n^{(2)}(kr) ,$$

wobei  $h_n^{(1,2)}(kr)$  als sphärische Hankel-Funktionen der 1. bzw. 2. Art bezeichnet werden:

$$h_n^{(1)}(kr) = j_n(kr) + iy_n(kr)$$

$$h_n^{(2)}(kr) = j_n(kr) - iy_n(kr).$$

### 6.3 Lösungen für inneres und äußeres Problem im $\mathbb{R}^3$

**Inneres Problem** Von  $j_n(kr)$  und  $y_n(kr)$  bleibt nur  $j_n(kr)$  um  $kr < a$ ,  $a > 0$  endlich. Daher kommt nur  $j_n(kr)$  für innere Probleme infrage:

$$R(r) = E j_n(kr)$$

Eingesetzt in den Produktansatz ist eine physikalische Lösung des inneren Problems:

$$p_{nm}(r, \varphi, \vartheta) = E j_n(kr) C P_n^m(\cos \vartheta) (A \sin(m\varphi) + B \cos(m\varphi)).$$

Mit der Summe über alle Moden ergibt sich mit normierten Kugelflächenfunktionen

$$p(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} j_n(kr) \underbrace{\sqrt{\frac{(n-|m|)!(2-\delta_m)}{4\pi(n+|m|)!}}}_{:=N_n^{|m|}} P_n^{|m|}(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos(m\varphi) & , m \geq 0 \\ \sin(m\varphi) & , m < 0 \end{cases},$$

**Äußeres Problem** Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung für den dreidimensionalen Raum:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial}{\partial r} + ik \right) R(r) = 0.$$

Es zeigt sich, dass nur  $h_n^{(2)}(kr)$  diese Bedingung erfüllt und die Lösung für den Schalldruck des ausstrahlenden Feldes ergibt

$$p(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} h_n^{(2)}(kr) N_n^{|m|} P_n^{|m|}(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos(m\varphi) & , m \geq 0 \\ \sin(m\varphi) & , m < 0 \end{cases}.$$

#### 6.3.1 Sphärische Basislösungen

Die anwendungsfertigen Lösungen sehen zusammen wie folgt aus

$$p(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (b_{nm} j_n(kr) + c_{nm} h_n^{(2)}(kr)) Y_n^m(\varphi, \vartheta).$$

Damit können wieder alle Arten von homogenen Schallfeldern durch bekannte Koeffizienten (*Wellenspektren*)  $b_{nm}$ ,  $c_{nm}$  dargestellt werden. Die winkelabhängigen Lösungen werden als  $Y_n^m(\varphi, \vartheta)$  zusammengefasst und als Kugelflächenfunktionen (engl. spherical harmonics) bezeichnet:

$$Y_n^m(\varphi, \vartheta) = N_n^{|m|} P_n^{|m|}(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos(m\varphi) & , m \geq 0 \\ \sin(m\varphi) & , m < 0 \end{cases}. \quad (159)$$

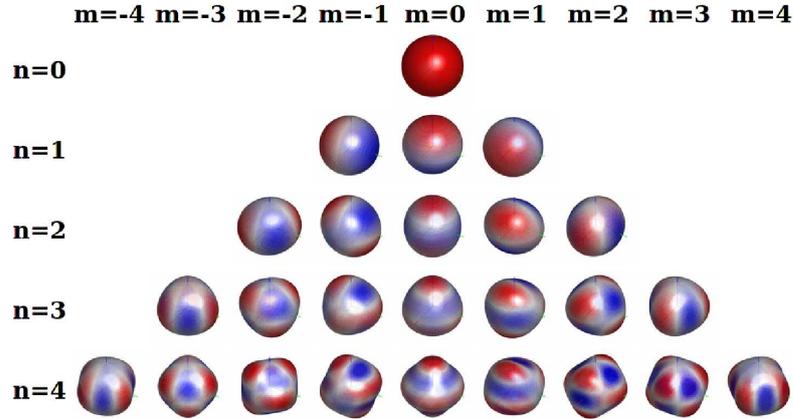


Abbildung 27 – Kugelflächenfunktionen / spherical Harmonics

Diese Funktionen sind normiert bezgl. ihrer quadratischen Summe auf der Einheitskugel und gehorchen der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_n^m Y_{n'}^{m'} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (160)$$

Weiters erlaubt die *Orthogonalitätsbeziehung* die Definition des Transformationsintegrals in Kugelflächenfunktionen

$$f(\varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \phi_{nm} Y_n^m(\varphi, \vartheta) \quad \left| \int Y_{n'}^{m'} \int Y_n^m = \delta_{n'n} \delta_{m'm} \right.$$

$$\Rightarrow \phi_{nm} = \iint f(\varphi, \vartheta) Y_n^m(\varphi, \vartheta) \, d\varphi \sin(\vartheta) \, d\vartheta. \quad (161)$$

Die unendliche Reihe an Kugelflächenfunktionen ist vollständig, daher gelingt es mit  $\phi_{nm} = \iint \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) Y_n^m(\varphi, \vartheta) \, d\varphi \sin(\vartheta) \, d\vartheta = Y_n^m(\varphi_0, \vartheta_0)$  auch, eine sphärische Dirac Deltafunktion an beliebigen Winkeln darzustellen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\varphi_0, \vartheta_0) Y_n^m(\varphi, \vartheta) = \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0). \quad (162)$$

### 6.3.2 Lösung der kugelförmigen Quellverteilung in Kugelkoordinaten 3D

Wird die Helmholtzgleichung von einer kugelförmigen Quellenordnung am Radius  $r_0$  mit einer richtungsabhängigen Amplitudenverteilung  $f(\boldsymbol{\theta})$  angeregt

$$(\Delta + k^2) p = -\frac{1}{r_0^2} \delta(r - r_0) f(\boldsymbol{\theta}), \quad (163)$$

so ist es geschickt, die Amplitudenverteilung in Kugelflächenfunktionen zerlegt anzugeben (hier vereinfacht mit der Abhängigkeit  $\boldsymbol{\theta}$  anstelle von  $\varphi, \vartheta$  notiert):

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \phi_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta}). \quad (164)$$

Weil sich der Richtungsanteil der Helmholtzgleichung vom  $kr$ -abhängigen Anteil separiert, muss der Koeffizient  $\phi_{nm}$  im Lösungsansatz vorkommen. Gesucht wird eine Funktion  $g_n(kr)$  in  $kr$  gesucht

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_n(kr) \phi_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta}). \quad (165)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind auch Eigenfunktionen des Laplace-Operators  $\Delta = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ , weswegen seine Anwendung ergibt (Eigenwert entspricht der Separationskonstante winkelabhängiger Terme)  $\Delta Y_n^m = -n(n+1)/r^2 Y_n^m$ . Eingesetzt und mit der Orthogonalitätsbeziehung Gl. (160) erhalten wir

$$\left( \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) g_n(kr) = -\frac{\delta(r-r_0)}{r_0^2} \quad (166)$$

**Lösung der inhomogenen sphärischen Bessel-Differentialgleichung.** Wie in Kreyszig [Kre99b] beschrieben, kann diese inhomogene Gleichung mit der *Variation der Konstanten* gelöst werden, bzw. wie in [Ger07], unter der Verwendung der beiden Lösungen  $h_n^{(2)}(kr)$  und  $j_n(kr)$  für den Radius, und mit  $dkr/dr = k$ :

$$g_n(kr) = h_n^{(2)}(kr) \int_0^r \frac{j_n(kr)}{W} \frac{\delta(r-r_0)}{r_0^2} \frac{dkr}{k} + j_n(kr) \int_r^\infty \frac{h_n^{(2)}(kr)}{W} \frac{\delta(r-r_0)}{r_0^2} \frac{dkr}{k}.$$

Darin drückt Wronski-Determinante  $W$ , ein Exprodukt, das hier verschieden von 0 ist, die Unabhängigkeit beider Lösungen aus, siehe [AS64]

$$W = \begin{vmatrix} j_n(kr) & j_n'(kr) \\ h_n^{(2)}(kr) & h_n^{(2)'}(kr) \end{vmatrix} = j_n(kr) h_n^{(2)'}(kr) - j_n'(kr) h_n^{(2)}(kr) = -\frac{i}{(kr)^2}. \quad (167)$$

Folgende Lösung erhalten wir:

$$g_n(kr) = -i k \begin{cases} j_n(kr_0) h_n^{(2)}(kr), & \text{für } r \geq r_0, \\ h_n^{(2)}(kr_0) j_n(kr) & \text{für } r \leq r_0. \end{cases} \quad (168)$$

**Die Quellenverteilung auf der Kugel** ergibt daher das Feld

$$G = -i k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \phi_{nm} Y_n^m(\boldsymbol{\theta}) \begin{cases} j_n(kr_0) h_n^{(2)}(kr), & \text{für } r \geq r_0, \\ h_n^{(2)}(kr_0) j_n(kr) & \text{für } r \leq r_0. \end{cases} \quad (169)$$

mit den normierten Kugelflächenfunktionen  $Y_n^m(\boldsymbol{\theta})$  aus Gl. (159).

### 6.3.3 Punktquelle in 3D

Für eine Punktquelle an der Richtung  $\theta_0$  ist der richtungsabhängige Anteil  $\phi_{nm} = Y_n^m(\theta_0)$

$$G = -i k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_0) Y_n^m(\theta) \begin{cases} j_n(kr_0) h_n^{(2)}(kr), & \text{für } r \geq r_0, \\ h_n^{(2)}(kr_0) j_n(kr) & \text{für } r \leq r_0. \end{cases} \quad (170)$$

**Punktquelle 3D im Ursprung.** Für den Radius  $r_0 = 0$  und mit  $j_{|n|}(0) = \delta_n$  erhalten wir mit  $Y_0^0 \phi_{00} = \frac{1}{4\pi}$  und  $h_0(kr) = \frac{e^{-ikr}}{-ikr}$  die bekannte Formel der Green'schen Funktion

$$G = -i k \frac{1}{4\pi} h_0(kr) = -i k \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{-ikr} = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \quad (171)$$

## 7 Sphärische Holografie / Holografie

### 7.1 Kugelförmige Mikrofon / Lautsprecherarrays

Kugelförmige Lautsprecherarrays sind den StudentInnen des Instituts für Elektronische Musik und Akustik bereits in Form des IEM-CUBE bekannt [Son00, MN02, Dan00]. Damit werden einfallende Wellenfelder - so gut es mit der begrenzten Anzahl von Lautsprechern geht - synthetisiert.

Es gibt aber auch eine Fülle ganz neuer, spannender Arbeiten zu kugelförmigen Mikrofonarrays für einfallende Schallfelder [ME02, Li05, Raf05], und abstrahlende Schallfelder [WA80, ZH07, Hoh09, Deb10]. Zusätzlich bedient sich auch das aktuellere Feld der kompakten Kugellautsprecheranordnungen der selben theoretischen Grundlage [WDC97, KW04, Beh06, AFKW06, ZH07, ZN07, ZPS08, Pom08, Pol07, Ple09, Zot09a, Ker10, Pas10].

Der wesentliche Vorteil von kugelförmigen Arrays ist, dass eine umfassende Analyse/Synthese für alle Raumrichtungen des Kugelkoordinatensystems möglich ist. Damit gibt es auch keine Vorne/Hinten Ambiguität für Arrays dieser Art.

**Verwendete Lösungen.** Wie oben gezeigt, wird die Wellengleichung in Kugelkoordinaten mit einem Produktansatz  $p_h = R(r) \Phi(\varphi) \Theta(\vartheta)$  und Separation der Variablen gelöst. Die Separationskonstanten beinhalten die Indizes  $n, m$ , die - wie oben gezeigt - ganzzahlig sein müssen. Letztendlich ergeben sich mit allen vorausgesetzten Bedingungen (Quellenfreiheit des einstrahlenden Feldes, Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung für ausstrahlende Wellen, Kausalität, Periodizität um  $\varphi$ ) die Lösungen

$$p_h = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (b_{nm} j_n(kr) + c_{nm} h_n(kr)) Y_n^m(\varphi, \vartheta), \quad (172)$$

$$\text{bzw. } v_h = \frac{i}{\rho_0 c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (b_{nm} j'_n(kr) + c_{nm} h'_n(kr)) Y_n^m(\varphi, \vartheta), \quad (173)$$

wobei der Index  $n$  oft Ordnung genannt wird,  $m$  Grad,  $Y_n^m(\varphi, \vartheta)$  die Kugelflächenfunktionen (*spherical Harmonics*),  $j_n(kr)$  die sphärischen Besselfunktionen und  $h_n(kr)$  die sphärischen Hankelfunktionen, sowie  $j'_n(kr)$ ,  $h'_n(kr)$  deren Ableitungen sind.

**Wellenspektrum.**  $b_{nm}$ ,  $c_{nm}$  sind Koeffizienten der einfallenden, bzw. auslaufenden Wellen und werden Wellenspektren genannt.  $b_{nm}$  beschreibt Wellen, die am Koordinatenursprung quellenfrei sind und dort keine Unendlichkeitsstellen besitzen dürfen.  $c_{nm}$  beschreibt Wellen, die vom Koordinatenursprung auslaufen, und dort  $n + 1$  Unendlichkeitsstellen besitzen.

Diese *sphärischen Basislösungen* behalten ihre Form im Winkel stets bei und bleiben bei Einstrahlung/Abstrahlung unabhängig voneinander. Sie werden nur durch die jeweilige radiale Funktion  $j_n(kr)$  oder  $h_n(kr)$  in Amplitude und Phase verändert. Der Lösungsraum besitzt keine so einfache Interpretation wie jener des ebenen Koordinatensystems. Ein wesentlicher Vorteil dieser Beschreibung liegt aber in der gleichmäßigen Auflösung im gesamten Raum, die aufgrund seiner Form vorne und hinten nicht verwechselt (ggf. Inneres mit Äußeren).

**Kugelflächenfunktionen.** Kugelflächenfunktionen sind der *anguläre* Anteil, der in beiden Arten von Basislösungen gleichermaßen auftritt. Am leichtesten lassen sie sich als Schallschnelle vorstellen, d.h. als Schwingungen einer Kugeloberfläche für eine gedachte Kugel mit bestimmten Radius vorstellen. Diese Kugelmoden bekommen mit zunehmender Ordnungszahl  $n$  mehrere *Knotenkreise*, wobei die Gradzahl  $m$  dem Betrage nach die Knotenkreise durch Nord- und Südpol der Kugel zählt. Als Kugelflächenfunktionen beschreiben sie die Fourier-Zerlegung der Kugeloberfläche.

**Sphärische Bessel / Neumannfunktionen.** Die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen beschreiben die radiale Ausbreitung von Schallfeldern in Kugelflächenfunktionen, siehe Abb. 28. Die sphärische Hankelfunktion setzt sich zusammen aus

$$h_n(kr) = j_n(kr) - iy_n(kr). \quad (174)$$

und besitzt daher mit den Neumannfunktionen eine Unendlichkeitsstelle bei  $r = 0$ . Die Besselfunktionen beschreiben einfallende Wellenfelder, die in den sphärischen Basislösungen betrachtet stehende Wellenfelder sind.<sup>11</sup> (Die abgeleiteten Funktionen werden zur Beschreibung der Schallschnelle verwendet.)

## 7.2 Matrixnotation von kugelförmigen Aufgaben

Mit einer geeigneten Reihenfolge, in welcher die Kugelflächenfunktionen der Indizes  $n$  und  $m$  in einen Vektor geschrieben werden, lässt sich die Doppelsumme in Gl. (172) als

<sup>11</sup>. Ebene Wellen sind einstrahlende Felder, aber an sich keine Stehwellen. Sie lassen sich aber aus entsprechender komplexwertiger Linearkombination der Stehwellenlösungen darstellen.

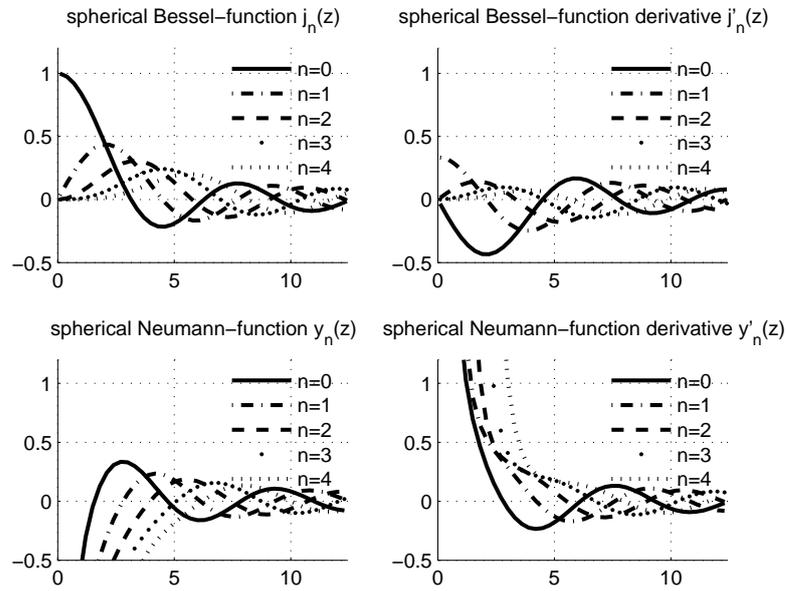


Abbildung 28 – Sphärische Bessel und Neumannfunktionen

Skalarprodukt anschreiben. Typischerweise wird  $n$  ab dem Index  $N$  abgebrochen, um endliche Vektorlängen zu erhalten. Damit, und mit dem komponentenweisen Hadamardprodukt für Vektoren  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \text{diag}\{\mathbf{a}\} \mathbf{b}$ , wird  $p = \sum \sum Y_n^m(\varphi, \vartheta) (b_{nm} j_n(kr) + c_{nm} h_n(kr))$  zu

$$p(kr, \varphi, \vartheta) = \mathbf{y}_N^T(\varphi, \vartheta) (\text{diag}\{\mathbf{j}_N(kr)\} \mathbf{b}_N + \text{diag}\{\mathbf{h}_N(kr)\} \mathbf{c}_N), \quad (175)$$

$$v(kr, \varphi, \vartheta) = \frac{i}{\rho_0 c} \mathbf{y}_N^T(\varphi, \vartheta) (\text{diag}\{\mathbf{j}'_N(kr)\} \mathbf{b}_N + \text{diag}\{\mathbf{h}'_N(kr)\} \mathbf{c}_N).$$

Mit der Definition der Vektorisierung von  $n$  und  $m$  zu  $q = n^2 + n + m + 1$  werden die Einzelausdrücke zu

$$\mathbf{b}_N := \begin{pmatrix} b_{0,0} \\ b_{1,-1} \\ b_{1,0} \\ b_{1,1} \\ b_{2,-2} \\ \vdots \\ b_{N,N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_N(kr) := \begin{pmatrix} j_0(kr) \\ j_1(kr) \\ j_1(kr) \\ j_1(kr) \\ j_2(kr) \\ \vdots \\ j_N(kr) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_N(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} Y_0^0(\varphi, \vartheta) \\ Y_1^{-1}(\varphi, \vartheta) \\ Y_1^0(\varphi, \vartheta) \\ Y_1^1(\varphi, \vartheta) \\ Y_2^{-2}(\varphi, \vartheta) \\ \vdots \\ Y_N^N(\varphi, \vartheta) \end{pmatrix}. \quad (176)$$

**Wellenspektrum.** Das Wellenspektrum  $\mathbf{b}_N$  reicht aus, um einfallende Schallfelder zu beschreiben, eine vollständige Beschreibung erhalten wir im Falle  $N \rightarrow \infty$ . Umgekehrt beschreibt das Wellenspektrum  $\mathbf{c}_N$  ausstrahlende Felder, auch vollständig für  $N \rightarrow \infty$ .

**Sphärisches Wellenspektrum.** Wird auf die Rücktransformation in den Winkelbereich verzichtet, so ergibt sich das *sphärisches Wellenspektrum*<sup>12</sup>. Die sphärischen Wellenspektren für Schalldruck und radiale Schallschnelle lauten:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_N(kr) &= \text{diag}\{\mathbf{j}_N(kr)\} \mathbf{b}_N + \text{diag}\{\mathbf{h}_N(kr)\} \mathbf{c}_N, \\ \boldsymbol{\nu}_N(kr) &= \frac{i}{\rho_0 c} (\text{diag}\{\mathbf{j}'_N(kr)\} \mathbf{b}_N + \text{diag}\{\mathbf{h}'_N(kr)\} \mathbf{c}_N).\end{aligned}\quad (177)$$

Zur Vollständigkeit: in den Ortsbereich gelangt man durch Rücktransformation, vgl. Gl. (175)

$$\begin{aligned}p(kr, \varphi, \vartheta) &= \mathbf{y}_N^T(\varphi, \vartheta) \boldsymbol{\psi}_N(kr), \\ v(kr, \varphi, \vartheta) &= \mathbf{y}_N^T(\varphi, \vartheta) \boldsymbol{\nu}_N(kr).\end{aligned}\quad (178)$$

### 7.3 Theorie zur Messung der Schallabstrahlung

Zur holografischen Bestimmung der Schallabstrahlung müssen die Koeffizienten  $\mathbf{c}_N$  ermittelt werden. Dazu wird im Winkel eine streng begrenzte Auflösung angenommen. Zudem wird angenommen, dass es keine Schalleinstrahlung gibt, also  $c_{nm} = 0 : n > N$ ,  $b_{nm} = 0$ . Vorerst können wir das sphärische Wellenspektrum  $\boldsymbol{\psi}_N(kR)$  aus dem Verlauf



Abbildung 29 – Kugelförmige Mikrofonanordnung zur Messung der Schallabstrahlung.

des Schalldruckes an einer Kugeloberfläche mit dem Radius  $R$  berechnen, wovon diskrete Messwerte an den Winkelpaaren  $\{\varphi_l, \vartheta_l\}$  mit  $l = 1 \dots L$  vorliegen. Schreibt man die Zusammensetzung aller  $L$  Schalldrücke aus dem sphärischen Wellenspektrum  $\boldsymbol{\psi}_N(kR)$

12. Im Gegensatz zu den *Wellenspektren* für ein/auslaufende Wellen  $\mathbf{b}_N$ ,  $\mathbf{c}_N$ , beziehen sich sph. Wellenspektren für Schalldrücke/Schallschnellen auf einen bestimmten Radius  $r$ , vgl. [Wil99].

untereinander an, ergeben sich  $L$  gleichzeitige Forderungen aus Gl. (178)

$$\begin{pmatrix} p(\varphi_1, \vartheta_1) \\ p(\varphi_2, \vartheta_2) \\ \vdots \\ p(\varphi_L, \vartheta_L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_N^T(\varphi_1, \vartheta_1) \\ \mathbf{y}_N^T(\varphi_2, \vartheta_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N^T(\varphi_L, \vartheta_L) \end{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_N(kR), \quad (179)$$

Kompakt angeschrieben

$$\mathbf{p} = \mathbf{Y}_N \boldsymbol{\psi}_N(kR). \quad (180)$$

**(Hyper-)Interpolation.** Gilt oben genannte Annahme der begrenzten Winkelauflösung (anguläre Bandbegrenzung), und lässt sich  $\mathbf{Y}_N^{-1}$  bilden, siehe Abschn. 7.9, so lässt sich ein diskret gemessenes Schalldruckmuster  $\mathbf{p}$  durch Inversion von Gl. (180) in ein sphärisches Wellenspektrum umrechnen, und mit Gl. (178) beliebig fein interpolieren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_N(kR) &= \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{p}, \\ \Rightarrow p(kR, \varphi, \vartheta) &= \mathbf{y}_N^T(\varphi, \vartheta) \boldsymbol{\psi}_N(kR). \end{aligned} \quad (181)$$

**Holografische Extrapolation.** Zum Wellenspektrum  $\mathbf{c}_N$  gelangt man, indem der Ausbreitungsterm  $h_n(kR)$  aus dem sphärischen Wellenspektrum  $\boldsymbol{\psi}_N(kR)$  heraus dividiert wird. Die reziproken Vektoreinträge werden einfach als invertierte Diagonalmatrix angeschrieben

$$\mathbf{c}_N = \text{diag} \{ \mathbf{h}_N(kR) \}^{-1} \boldsymbol{\psi}_N(kR). \quad (182)$$

Von  $\mathbf{c}_N$  ausgehend ist es mit  $b_{nm} = 0$  und Gl. (177) möglich, einen beliebigen Radius  $r$  einzusetzen, der alle im Schallfeld enthaltenen Quellen (inkl. Spiegelquellen) einschließen muss, um den Schalldruck zu bestimmen

$$\boldsymbol{\psi}_N(kr) = \text{diag} \{ \mathbf{h}_N(kr) \} \mathbf{c}_N.$$

Die Formel gilt im Frequenzbereich, da  $k = \omega/c$ . In Vektornotation voll ausgeschrieben, ergibt sich für den diskreten Schalldruck die Interpolation im Winkel und Extrapolation im Radius

$$p(kr, \varphi, \vartheta) = \mathbf{y}_N^T(\varphi, \vartheta) \text{diag} \{ \mathbf{h}_N(kr) \} \text{diag} \{ \mathbf{h}_N(kR) \}^{-1} \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{p}. \quad (183)$$

*Für Interessierte:* Fabian Hohl hat die Messkugel am Institut gebaut und einige Instrumente auf Ähnlichkeiten ihrer Teiltonabstrahlungen untersucht [Hoh09]. Daniel Deboy hat in seiner Diplomarbeit untersucht, inwieweit Schallquellen in der Messkugel lokalisiert werden können, und ihre Orientierung verfolgt werden kann [Deb10]. Wie die Abtastung der Kugel funktioniert ist in [Zot09b] zu finden.

## 7.4 Theorie zur Erzeugung von Schallabstrahlung

Zur holofonen Synthese von Schallabstrahlung wird angenommen, dass eine kompakte kugelförmige Anordnung von Lautsprechern, vgl. Abb. 30, im geschlossenen Kugelgehäuse eine Randbedingung der Schallschnelle für das äußere Schallfeld darstellt. Dazu werden einzelne Lautsprechermembranen als Kugelkappe einer festen Kugel betrachtet, die im Unterschied zu unbewegten festen Kugelteilen ( $v(\varphi, \vartheta) = 0$ ), jeweils eine konstante Amplitude und Phase an der Position  $l$  der Membranen als Oberflächenschnelle einprägt  $v(\varphi, \vartheta) = v^{(l)}$ .

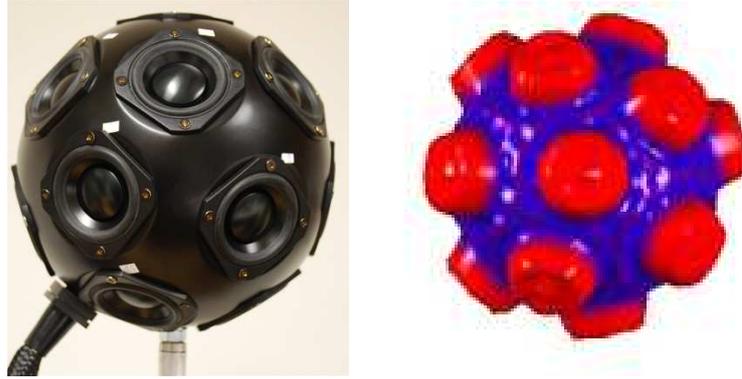


Abbildung 30 – Links: kompakte kugelförmige Lautsprecheranordnung zur Synthese variabler Schallabstrahlung (akustische Holografie), rechts: Kappenmodell mit allen Membranschnellen auf 1 gesetzt. Abbildungen aus [Ker10].

### 7.4.1 Kugelkappenmodell durch Faltung auf der Kugel

Zur Darstellung aller kugelkappenförmig verteilten Schallschnellen in Kugelflächenfunktionen muss eine große Winkelauflösung  $Q \rightarrow \infty$  verwendet werden, um scharfen Grenzen der Membranen abzubilden. Zur Berechnung wird die Geometrie der Membranen von ihrer steuerbaren Schnelle getrennt formuliert. Die Oberflächenschnelle des Gesamtsystems wird zur Summe  $L$  gewichteter Aperturfunktionen  $a^{(l)}$  mit den Membranschnellen  $v^{(l)}$

$$v(\varphi, \vartheta) = \sum_{l=1}^L a^{(l)}(\varphi, \vartheta) v^{(l)}.$$

Diese Aperturfunktionen werden mit dem Faltungssatz auf der Kugel [DH94] und aus der Transformierten einer Dirac-Deltaverteilung in die Kugelflächenfunktionen gebildet. Dabei wird eine Nordpolkappe des entsprechenden Öffnungswinkels  $\alpha$

$$a^{(\text{nordp.})}(\vartheta) = 1 - u(\vartheta - \alpha/2)$$

durch Faltung mit der Deltadistributionen eines Lautsprechermittelpunktes an die richtige Stelle auf der Kugel gefaltet. Für den  $l$ -ten Lautsprecher ist das symbolisch:

$$a^{(l)}(\varphi, \vartheta) = a^{(\text{nordp.})}(\vartheta) \star \delta(\varphi - \varphi_l) \delta(\vartheta - \vartheta_l).$$

Die sphärischen Spektren

$$a_n^{(\text{nordp.})} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \pi \delta_m \begin{cases} \cos(\alpha/2) P_n(\cos(\alpha/2)) - P_{n-1}(\cos(\alpha/2)), & n > 0 \\ 1 - \cos(\alpha/2), & n = 0 \end{cases}$$

und  $Y_n^m(\varphi_l, \vartheta_l)$ , Gl.(??), ergeben das Spektrum der Apertur (Faltungssatz auf der Kugel)

$$a_{nm}^{(l)} = a_n^{(\text{nordp.})} Y_n^m(\varphi_l, \vartheta_l).$$

Das gesamte Oberflächenschnellemuster transformiert in Kugelflächenfunktionen kann folglich als Matrix-Vektorprodukt angeschrieben werden, mit  $\mathbf{A}_Q = \text{diag}_Q\{\mathbf{a}_Q^{(\text{nordp.})}\} \mathbf{Y}_Q^T$  und den Schnellen  $\mathbf{v} = [v^{(1)} \dots v^{(L)}]^T$

$$\boldsymbol{\nu}_Q = \mathcal{SHT}\{v(\varphi, \vartheta)\} = \mathbf{A}_Q \mathbf{v}. \quad (184)$$

#### 7.4.2 Randwertproblem: Wellenspektrum des Kugelkappenmodells

Über das Wellenspektrum  $\mathbf{c}_N$  in Bezug auf Schallschnelle und Schalldruck, Gl. (177), berechnet sich das sphärische Wellenspektrum des Schalldruckes zu

$$\boldsymbol{\psi}_Q(r) = \frac{\rho_0 c}{i} \text{diag}\{\mathbf{h}_Q(kr)\} \text{diag}\{\mathbf{h}'_Q(kR)\}^{-1} \mathbf{A}_Q \mathbf{v}. \quad (185)$$

Zur Steuerung wird in vorhandenen Literaturquellen der Vektor  $\mathbf{v}$  mit den Eingangsspannungen der Lautsprecher elektroakustisch ins Verhältnis gesetzt. Ziel dabei ist, jede einzelne Komponente in  $\boldsymbol{\psi}_N$  zu steuern, wobei zur Steuerbarkeit in jedem Fall  $N \leq \sqrt{L} - 1$  gelten muss. Ordnungen größer als  $N$  werden nicht gesteuert, können deshalb bei hohen Frequenzen räumliches Aliasing beinhalten.

Wird - zur groben Vereinfachung - der Vektor mit den Membranschnellen als Eingangsgröße betrachtet, so ergibt sich die Ansteuerung mit  $\mathbf{v}$  für ein gewünschtes sphärisches Wellenspektrum  $\boldsymbol{\psi}_N|_{r_p}$  aus der Inversion der oberen Gleichung zu

$$\mathbf{v} = \frac{i}{\rho_0 c} \mathbf{A}_N^{-1} \text{diag}\{\mathbf{h}'_N(kR)\} \text{diag}\{\mathbf{h}_N(kr_p)\}^{-1} \boldsymbol{\psi}_N|_{r_p}. \quad (186)$$

Der daraus berechnete Schalldruck mit Gl. (185) beinhaltet dann auch räumliche Aliase.

*Für Interessierte:* Die radiale Scharfstellung mit dem Term  $\frac{h'_n(kR)}{h_n(kr_p)}$  erfolgt über IIR Filter aus der Diplomarbeit von Hannes Pomberger [ZN07, Pom08], die genaue Form von  $\mathbf{A}_Q$  ist in [ZH07, Pol07, Zot09a, Ker10, Pas10] ersichtlich. Elektroakustische Modelle finden sich in [ZPS08, Zot09a, Pas10].

## 7.5 Theorie zur Erzeugung von Schalleinstrahlung

Zur holofonen Erzeugung von Schalleinstrahlung ( $c_{nm} = 0 : \forall n$  und  $b_{nm} = 0 : n > N$ ) wäre es ungünstig, wie zuvor feste unbewegliche kugelförmige Wände zu bauen und darin nach innen weisende Lautsprecher zu montieren. Abgesehen vom konstruktiven Nachteil ergibt sich ein handfester Nachteil: So ein Raum hätte stark ausgeprägte Resonanzen. Mathematisch betrachtet müsste folglich die Erzeugung einfallender Moden an bestimmten Frequenzen daran scheitern, dass die Einstrahlungsfunktion für bestimmte Frequenzen an der Raumboberfläche  $j'_n(kR) = 0$  bleiben muss. Die betroffene Ordnung  $n$ , kann als ganzes nicht reproduziert werden.

Holofone Erzeugung von Schalleinstrahlung verwendet einen anderen Ansatz: Am Radius  $R$  befindet sich eine kugelförmige Anordnung von Quellen, die im Gegensatz zu einer Randbedingung kein Hindernis für die Schallausbreitung sind. Die mathematische Formulierung geschieht über eine Verteilung mit dem Quellsignal  $f(\varphi, \vartheta)$  an der Stelle  $R$ , welche die Helmholtzgleichung anregt [ZPF09]

$$(\Delta + k^2) p = -f(\varphi, \vartheta) \frac{\delta(r - R)}{r^2}. \quad (187)$$

Das entspricht einer kontinuierlichen kugelförmigen Fläche aus Punktquellen mit individuellen Signalen (Quellstärkeverteilung, *source-strength distribution*); man könnte dabei an eine verteilte Vielzahl an Lautsprecher denken.

Die Lösung dieser inhomogenen Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten verwendet die Quellstärkeverteilung im Bereich der Kugelflächenfunktionen transformiert

$$\phi_Q = \iint f(\varphi, \vartheta) \mathbf{y}_Q(\varphi, \vartheta) d\varphi \sin(\vartheta) d\vartheta \quad (188)$$

und ergibt das Wellenspektrum

$$\mathbf{b}_Q = -ik \text{diag} \{ \mathbf{h}_Q(kR) \} \phi_Q. \quad (189)$$

Durch das Wellenspektrum  $\mathbf{b}_Q$  ist der Schalldruck an jedem Punkt innerhalb  $r < R$  beschrieben

$$p(kr, \varphi, \vartheta) = \mathbf{y}_Q^T(\varphi, \vartheta) \text{diag} \{ \mathbf{j}_Q(kr) \} \mathbf{b}_Q. \quad (190)$$

**Quellstärkeverteilung Punktquelle.** Wird eine Punktquelle mit Einheitsamplitude an den Koordinaten  $r_0, \varphi_0, \vartheta_0$  angenommen, so berechnet sich ihre Quellstärkeverteilung in Kugelflächenfunktionen aus Gl.(??) zu

$$f(\varphi, \vartheta) = \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0), \quad (191)$$

$$\phi_Q = \iint \mathbf{y}_Q(\varphi, \vartheta) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) d\varphi \sin(\vartheta) d\vartheta = \mathbf{y}_Q(\varphi_0, \vartheta_0). \quad (192)$$

Diese Transformation ist auch brauchbar, um später virtuelle Punktquellen formulieren zu können, bzw. um Lautsprecher als Punktquellen zu modellieren. Die Punktquelle hat also ein Wellenspektrum

$$\mathbf{b}_Q = -ik \text{diag} \{ \mathbf{h}_Q(kr_0) \} \mathbf{y}_Q(\varphi_0, \vartheta_0). \quad (193)$$

**Diskrete Lautsprecherverteilung im Winkel.** Liegt eine diskrete Quellverteilung in Form einer umgebenden kugelförmigen Lautsprecheranordnung an den Winkelpaaren  $\{\varphi_l, \vartheta_l\}_{l=1\dots L}$  und dem Radius  $R$  vor, und es gibt einen Ansteuerungsvektor  $\mathbf{g}$ , so lässt sich  $f$  angeben als

$$\hat{f}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \delta(\varphi - \varphi_1)\delta(\vartheta - \vartheta_1) \\ \delta(\varphi - \varphi_2)\delta(\vartheta - \vartheta_2) \\ \vdots \\ \delta(\varphi - \varphi_L)\delta(\vartheta - \vartheta_L) \end{pmatrix}^T \mathbf{g}, \quad (194)$$

$$\hat{\phi}_Q = \iint \mathbf{y}_Q(\varphi, \vartheta) \hat{f}(\varphi, \vartheta) d\varphi \sin(\vartheta) d\vartheta = \mathbf{Y}_Q^T \mathbf{g}. \quad (195)$$

Damit ergibt sich das Wellenspektrum der diskreten Quellverteilung zu

$$\hat{\mathbf{b}}_Q = -ik \operatorname{diag} \{\mathbf{h}_Q(kR)\} \mathbf{Y}_Q^T \mathbf{g}. \quad (196)$$

**Ambisonics und Anpassung der Wellenspektren.** Der Ambisonics-Ansatz versucht nun, die Wellenspektren  $\hat{\mathbf{b}}_Q$  mit einer gewünschten, beliebigen Quellstärkeverteilung, z.B. jener einer Punktquelle  $\mathbf{b}_Q$ , in Übereinstimmung zu bringen.

Ambisonics nimmt dazu an, dass es günstig ist, die Steuerung von  $\hat{\phi}_Q$  aus Gl. (195) zu berechnen, indem nur eine geglättete Winkelauflösung betrachtet wird, also eine begrenzte Ordnung  $N$ . Damit wird verhindert, dass Richtungsinformation in der diskreten Darstellung verloren geht.

Somit ergibt sich die Steuerung von  $\mathbf{g}$  aus Gln. (193)(196) zu

$$\mathbf{g} = (\mathbf{Y}_N^T)^{-1} \operatorname{diag} \{\mathbf{h}_N(kr_0)\} \operatorname{diag} \{\mathbf{h}_N(kR)\}^{-1} \mathbf{y}_N(\varphi_0, \vartheta_0), \quad (197)$$

worin  $(\mathbf{Y}_N^T)^{-1}$  der sog. *Dekoder* [Dan00], siehe Abschn. 7.9, der Ambisonicsanordnung ist und  $\frac{h_n(kr_0)}{h_n(kR)}$  die sog. *Distanzkodierung* [Dan00] und  $\mathbf{y}_N(\varphi_0, \vartheta_0)$  die *Enkodierung* einer Punktquelle sind. Diese Art der Steuerbarkeit ist nur mit gleichmäßigen, vollständigen Lautsprecheranordnungen möglich, wobei die Einschränkung der Winkelauflösung  $N \leq \sqrt{L} - 1$  gilt.

Wird die Distanzkodierung weggelassen, so wird die Gleichung unabhängig von der Frequenz und virtuelle Quellen sind am Radius der Lautsprecheranordnung angeordnet. Räumliche Aliase sind die Komponenten für  $n > N$ , welche außerhalb des sog. *sweet-spot* Gewicht bekommen. Das ist ein zentraler Bereich, der nur etwa  $N/3$  Wellenlängen durchmisst. Warum Ambisonics dennoch nicht nur für binaurale Anwendungen gut funktioniert ist eine offene Frage der Psychoakustik.

Diese Theorie ist auch zur Interpolation und Extrapolation von Richtwirkungsmustern bei der Vermessung von Mikrofonen anwendbar.

Alternativen für unvollständige Lautsprecheranordnungen und weniger perfekte Dekodierung können in [Pom08] gefunden werden.

## 7.6 Diskrete Zerlegung und Erzeugung von Kugelflächenfunktionen

In den vorigen Abschnitten wurden bereits Zerlegung und Erzeugung von Kugelflächenfunktionen angewendet. Der Zusammenhang kommt in der Fachliteratur relativ kurz, benötigt aber Erläuterung. Allgemein betrachtet, wird dabei ein sphärisches Spektrum  $\gamma_{nm}$  mit einem diskreten Muster  $g_l$ , das an verschiedenen diskreten Winkeln auf einem Radius existiert, rechnerisch in Beziehung gesetzt. Am einfachsten wird das diskrete Muster  $g_l$  als Vektor  $\mathbf{g} = (g(\theta_1), \dots, g(\theta_L))^T$  geschrieben. In [Zot09b, Zot09a] werden einige

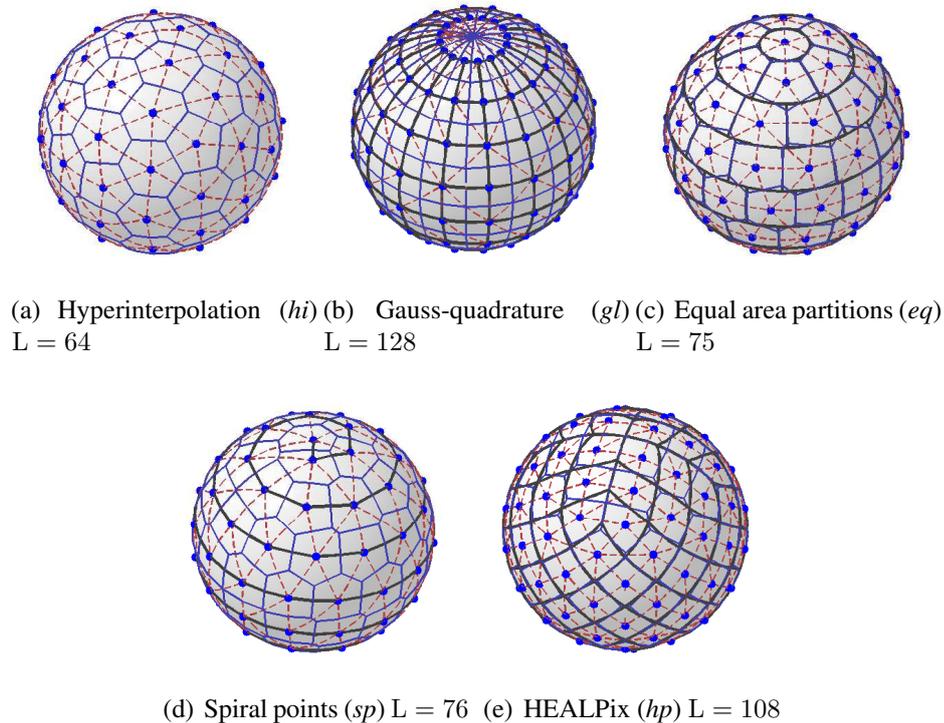


Abbildung 31 – Beispiele für verschiedene Abtastungsstrategien der Kugel [Zot09b].

Diskretisierungsarten auf der Kugel zitiert, zu sehen in Abb. 31.

### 7.6.1 Zerlegung: ortsdiskretisierte Kugelflächenfunktionenreihe

Eine kontinuierliche Funktion  $g(\theta)$  kann aus einer unendlichen Summe der mit dem sphärischen Spektrum gewichteter Kugelflächenfunktionen zusammengesetzt werden. Wir drücken diese als Inprodukt zweier unendlich langer Vektoren  $\mathbf{y}(\theta) = (Y_{0,0}(\theta), \dots, Y_{NN}(\theta), \dots)^T$  und  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{0,0}, \dots, \gamma_{NN}, \dots)^T$  aus

$$\mathbf{g}(\theta) = \mathbf{y}(\theta)^T \boldsymbol{\gamma}.$$

Diskretisieren wir diese im Winkel, erhalten wir ein ortsdiskretes Muster  $\mathbf{g}$

$$\mathbf{g} = \mathbf{Y} \boldsymbol{\gamma}, \quad \text{mit } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T(\boldsymbol{\theta}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^T(\boldsymbol{\theta}_L) \end{bmatrix}. \quad (198)$$

Zur Zerlegung eines allgemeinen Musters  $\mathbf{g}$  müsste das unendlich große Gleichungssystem Gl. (198) invertiert werden, um das sphärische Spektrum zu erhalten. *Die Annahme eines in der Ordnung<sup>13</sup> begrenzten Musters  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_N = \mathbf{Y}_N \boldsymbol{\gamma}_N$  erlaubt die Inversion. Demnach dürfen nur Kugelflächenfunktionen begrenzter Ordnung am Entstehen des Musters beteiligt sein.*

### 7.6.2 Erzeugung: Steuerung sphärischer Spektren mit gesteuerten Punkten

Typischerweise ist zur Erzeugung von Mustern aus Kugelflächenfunktionen die Ansteuerung diskreter Punkte nötig. Als Steuergrößen haben diese Punkte sphärische Spektren, die bekannt sind.

Das sphärische Spektrum  $\gamma$  eines Punktes an  $\boldsymbol{\theta}_0$  entspricht (siehe Gln. (161)(192))  $\gamma = \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_0)$ . Wird ein System aus Punkten mit Gewichten  $\mathbf{g}$  gesteuert, ergibt sich das Spektrum:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Y}^T \mathbf{g}. \quad (199)$$

Zur Erzeugung eines gewünschten Spektrums  $\boldsymbol{\gamma}$  müssten die Punkte mit dem inversen unendlich großen Gleichungssystem Gl. (199) angesteuert werden. *Dazu wird das System  $\boldsymbol{\gamma}_N = \mathbf{Y}_N^T \mathbf{g}_N$  der Punktspektren als im Winkel bandbegrenzt angenommen und invertiert. Diese Bandbegrenzung im Winkel sollte bei der Synthese eingefordert werden.*

---

13. Man spricht von „im Winkel bandbegrenzt“.

### 7.6.3 Inversion

Für oben genannte Fälle ist entweder die Inversion von  $\mathbf{Y}_N$ , oder von  $\mathbf{Y}_N^T$  erforderlich. Die muss nicht unbedingt trivial sein. Sollte sie gelingen, gelten die Formeln der folgenden zwei Absätze.

#### Minimierung der Fehlerquadrate zur diskreten Kugelflächenfunktionenanalyse

Wenn keine extremalen Punkte zur Hyperinterpolation verwendet werden, gibt es keine Inverse, nur eine Linksinverse. Bei der Analyse stehen mehr Messwerte zur Verfügung als Spektralkoeffizienten geschätzt werden sollen. Das Ergebnis entspricht der Minimierung der Fehlerquadrate, vgl. [HG06]:

$$\begin{aligned} J(\gamma_N) = \|\mathbf{g} - \mathbf{Y}_N \gamma_N\|^2 \rightarrow \min & \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \gamma_N^T} J(\gamma_N) = \mathbf{Y}_N^T \mathbf{g} - \mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N \gamma_N \stackrel{!}{=} 0, \\ \Rightarrow \gamma_N = \underbrace{(\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1} \mathbf{Y}_N^T}_{:= \mathbf{Y}_N^\dagger} \mathbf{g}. & \quad (200) \end{aligned}$$

Die Verteilung der Abtastpunkte ist entscheidend für die gute Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N$ , d.h. alle Singulärwerte sind dann groß genug,  $K = (N + 1)^2$ . Fehler kommen nur durch Muster zustande, die nicht in Kugelflächenfunktionen begrenzter Ordnung ausgedrückt  $\mathbf{g} \neq \mathbf{Y}_N \gamma_N$  bzw. in solche umgedeutet werden können. Sind die Abtastpunkte ungleich verteilt, so werden solche Zerlegungsfehler (etwa durch Rauschen der Mikrofone) auf der Kugelfläche ungleich verteilt.

#### Bedingte Minimierung der Quadrate zur Kugelflächenfunktionensynthese

Wenn keine Punkte für Hyperinterpolation verwendet werden, gibt es keine Inverse, nur eine Rechtsinverse. Für die Synthese stehen dann mehr Steuerungspunkte als die Anzahl an bandbegrenzten Kugelflächenfunktionen, die erzeugt werden sollen, zur Verfügung. Die Gleichheit der (im Bandbegrenzten) erzeugten Spektren kann auf viele Arten erreicht werden. Für eine eindeutige Lösung wird deshalb nicht nur Gleichheit gefordert, sondern auch die Energie der Gewichte  $\|\mathbf{g}\|^2$  minimiert

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}\|^2 \rightarrow \min. & \quad (201) \\ \text{subject to: } \gamma_N \stackrel{!}{=} \mathbf{Y}_N^T \mathbf{g}, & \quad \Rightarrow J(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \|\mathbf{g}\|^2 + (\gamma_N^T - \mathbf{g}^T \mathbf{Y}_N) \boldsymbol{\lambda}, \end{aligned}$$

worin der Optimierungsfehler  $J(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda})$  ist und die Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}$  sind. Optimierung ergibt (vgl. [HG06]):

$$\begin{aligned} I: \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}^T} J(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{g}_{\text{opt}} - \mathbf{Y}_N \boldsymbol{\lambda} \stackrel{!}{=} 0, & \quad \Rightarrow \mathbf{g}_{\text{opt}} = \mathbf{Y}_N \boldsymbol{\lambda} \\ II: \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} J(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}^T) = \gamma_N - \mathbf{Y}_N^T \mathbf{g} \stackrel{!}{=} 0, & \quad \text{mit } \mathbf{g}_{\text{opt}} \text{ aus I} \quad \boldsymbol{\lambda}_{\text{opt}} = (\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1} \gamma_N, \\ & \quad \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{Y}_N (\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1} \gamma_N. \quad (202) \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathbf{Y}_N (\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1}$  wird in Ambisonics *Dekoder* genannt.

### Verallgemeinerte Inverse: Pseudoinverse durch Singulärwertzerlegung

Die Struktur der Singulärwertzerlegung<sup>14</sup> (SVD) bietet Hilfe bei der Inversion, indem  $\mathbf{Y}_N = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$  in eine Diagonalmatrix mit Singulärwerten  $\mathbf{S} = \text{diag}\{\mathbf{s}\}$  und zwei orthogonalen Matrizen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  mit den Links- und Rechtseigenvektoren zerlegt wird. Die SVD kann für eine regularisierte Inverse  $\mathbf{Y}_N^\dagger = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^T$  benutzt werden, indem nur die  $K$  ausreichend großen Singulärwerte aus  $\tilde{\mathbf{S}}$  behalten werden und der Rest - auch aus den orthogonalen Matrizen - verworfen wird. Man könnte  $K$  als die *mit sinnvollem Aufwand steuerbaren* Freiheitsgrade bezeichnen.

Die regularisierte Pseudoinverse nach [GK65] ergibt für Gl. (198) einerseits das aus beliebigen Mustern  $\mathbf{g}$  geschätzte Spektrum  $\gamma_N$ , bzw. für Gl. (199) die Gewichte  $\mathbf{g}_N$  für das Wunschspektrum  $\gamma_N$

$$\text{Analyse: } \gamma_N = \mathbf{Y}_N^\dagger \mathbf{g}, \quad \text{Synthese: } \mathbf{g}_N = (\mathbf{Y}_N^T)^\dagger \gamma_N. \quad (203)$$

Durch das Verwerfen kleiner Singulärwerte, wird die Division durch Null, also eine Zerlegung in Muster, die schwer zu trennen und daher störanfällig<sup>15</sup> sind, vermieden. Die Eigenschaft der Inversen bestimmt sich aus den Dimensionen von  $\mathbf{Y}_N$  und der Anzahl  $K$ :

1. *Diskrete Kugelflächenfunktionenanalyse/-synthese*: Spektren werden durch die Pseudoinverse exakt bestimmt, wenn die Bandbegrenzung im Winkel eingehalten wird und alle Spektralkomponenten bestimmt/überbestimmt sind  $K = (N + 1)^2 \leq L$ .
2. *Diskrete Kugelflächenfunktioneninterpolation*: Muster/Gewichte  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_N$  stimmen durch die Pseudoinverse exakt überein, wenn die Punkte bestimmt/überbestimmt sind  $K = L \leq (N + 1)^2$ .
3. *Kugelflächenfunktionenapproximation*: Wenn  $K < \min[(N + 1)^2, L]$ , ergibt die Pseudoinverse weder Interpolation noch Analyse und kann nur als Näherung verwendet werden.

Im ersten Fall, der Analyse/Synthese erhält man stets exakt bestimmte sphärische Spektren begrenzter Ordnung, die gegebenen Mustern/Gewichten entsprechen. Diese Zerlegungsart ist für Holografie und Holografie nützlich. Bei der Analyse liest sie sich als  $(\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1} \mathbf{Y}_N^T$  und invertiert  $\mathbf{Y}_N$  von der linken Seite. (Bei der Synthese invertiert  $\mathbf{Y}_N^T (\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1}$  die Matrix  $\mathbf{Y}_N^T$  von rechts.).

Im zweiten Fall erhält man stets exakt bestimmte diskrete Muster, die sphärischen Spektren begrenzter Ordnung entsprechen. Im dritten Fall sind sowohl für die Analyse, als auch die Interpolation zu wenige Singulärwerte/Freiheitsgrade übrig. Jedoch liefert die Pseudoinverse laut [GK65] die bestmögliche Zwischenlösung: *sie findet den kürzesten Lösungsvektor  $\gamma_N$ , der den Abstand zwischen  $\mathbf{Y}_N \gamma_N$  und  $\mathbf{g}$  minimiert.*

Abb. 32 klassifiziert einige Abtastungsstrategien der Kugel in das dreiteilige Schema. Als Ordnung wird für alle  $N = 9$  verwendet, und die Anzahl der Abtastpunkte wird variiert: extremale Punkte für Hyperinterpolation [SW04] (*hi*), Spiralpunkte [RSZ95] (*sp*), Gleichflächige Zerlegung [SK97] (*eqa*), HEALPix [GHB<sup>+</sup>05], Gauß-Legendre-Raster

14. singular-value decomposition

15. Im Audibereich sind vermutlich Singulärwerte von  $0 \dots -20\text{dB}$  noch praktisch.

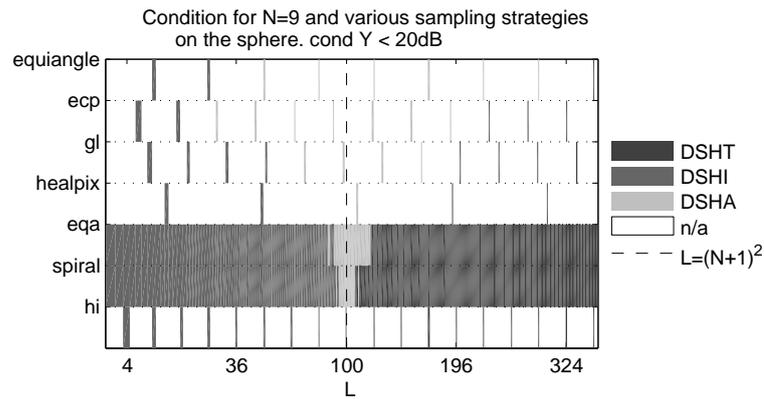


Abbildung 32 – Bekannte Abtungsstrategien sind zur Interpolation (pseudo-spectral analysis [Boy00]), Approximation oder Transformation (spectral analysis [Boy00]) geeignet. Um  $L = (N + 1)^2$  gelten die meisten nur für Approximation; Hyperinterpolation ist beides: Interpolation und Transformation.

[Sne94] (*gl*), Gleichwinkeliges zylindrisches Raster [Sne94] (*ecp*), gleichwinkeliges Raster [DH94].

Bei der Ambisonicswiedergabe ist oft keine Holografie möglich und die verallgemeinerte Inverse leistet bei ausreichender Regularisierung gute Dienste. Warum das Resultat für das Gehör oftmals ausreicht, ist Gegenstand der Dissertation von Matthias Frank [Fra13]. Verallgemeinerte Dekodierungsstrategien sind in [ZPN12, ZF12, ?].

## 7.7 Theorie zur Messung der Schalleinstrahlung

Mit kompakten kugelförmigen Mikrofonanordnungen lässt sich das rundum einfallende Schallfeld aufnehmen. Im Bereich der Kugelflächenfunktionen lässt sich auch in diesem Fall akustische Holografie machen (Extrapolation des aufgenommenen Schallfeldes auf einen anderen Radius).

Wie oben wird  $c_{nm} = 0 : \forall n$  und  $b_{nm} = 0 : n > N$  angenommen, d.h. ein Schallfeld mit begrenzter Richtungsauflösung und ohne Quellen am Koordinatenursprung. Die sphärischen Wellenspektren von Schalldruck und Schallschnelle an einem Radius  $R$  sind somit

$$\psi_N(kR) = \text{diag}\{\mathbf{j}_N(kR)\} \mathbf{b}_N, \quad (204)$$

$$\nu_N(kR) = \frac{i}{\rho_0 c} \text{diag}\{\mathbf{j}'_N(kR)\} \mathbf{b}_N. \quad (205)$$

Weil der vom Radius abhängige Teil in beiden Gleichungen 0 werden kann, sind reine Drucksensoren, bzw Radialschnellesensoren alleine nicht zielführend. Typischerweise gibt es 2 Lösungsstrategien: die Verwendung von Nierenmikrofonen am Radius  $R$ , oder der Einsatz von Druckmikrofonen auf einer festen Kugel mit dem Radius  $R$ .

**Kompakte kugelförmige Mikrofonanordnung mit fester Oberfläche.** An einer festen Kugeloberfläche gilt die Bedingung einer verschwindenden Schallschnelle in Oberflächennormalrichtung  $\nu_N(kR) = 0$ . Das wird in der Literatur [Li05, Raf05, Pet04, Mor06] erreicht, indem das ausstrahlende Wellenspektrum  $\mathbf{c}_Q$  des gebeugten Schallfeldes berechnet wird:

$$\nu_Q(kR) = \frac{i}{\rho_0 c} (\text{diag}\{\mathbf{j}'_Q(kR)\} \mathbf{b}_Q + \text{diag}\{\mathbf{h}'_Q(kR)\} \mathbf{c}_Q) \stackrel{!}{=} 0, \quad (206)$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}_Q = -\text{diag}\{\mathbf{j}'_Q(kR)\} \text{diag}\{\mathbf{h}'_Q(kR)\}^{-1} \mathbf{b}_Q. \quad (207)$$

Es ergibt sich eine neue Gleichung für das Wellenspektrum des Schalldruckes

$$\begin{aligned} \psi_Q(kR) &= \text{diag}\{\mathbf{j}_Q(kR)\} - \text{diag}\{\mathbf{h}_Q(kR)\} \text{diag}\{\mathbf{j}'_Q(kR)\} \text{diag}\{\mathbf{h}'_Q(kR)\}^{-1} \mathbf{b}_Q \\ &= \frac{1}{i(kR)^2} \text{diag}\{\mathbf{h}'_Q(kR)\}^{-1} \mathbf{b}_Q. \end{aligned} \quad (208)$$

Zur Zeile 2 gelangt man über die Wronski-Determinante sphärischer Besselfunktionen  $j_n(kr) h'_n(kr) - j'_n(kr) h_n(kr) = 1/i(kr)^2$ . Das bemerkenswerte an obiger Gleichung ist, dass zur Berechnung von  $\mathbf{b}_Q$  durch keine Nullfaktoren mehr dividiert werden muss. Diese Filterfrequenzgänge sind zur Kartierung von Quellstärkeverteilungen geeignet. Wie oben, ist das Wellenspektrum einer Quellstärkeverteilung  $\phi_Q$  am Radius  $r_p$  definiert als

$$\mathbf{b}_Q = -ik \text{diag}\{\mathbf{h}_Q(kr_p)\} \phi_Q. \quad (209)$$

Beschränkt man sich auf eine endliche Ordnung  $n \leq N < Q$ , bildet das Wellenzahlspektrum  $\psi_N(kR) = \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{p}$ , mutmaßt mit Quellen am Radius  $r_p$ , so kann Gl. (209) in Gl. (208) eingesetzt und durch Inversion die Quellstärkeverteilung  $\phi_N$  kartieren werden:

$$\phi_N = -\text{diag}\{(kR)^2 \mathbf{h}'_N(kR)\} \text{diag}\{k \mathbf{h}_N(kr_p)\}^{-1} \mathbf{Y}_N^{-1} \mathbf{p}. \quad (210)$$

Im Winkel aufgetragen ist das dann

$$f(\varphi, \vartheta) = \mathbf{y}_N^T(\varphi, \vartheta) \boldsymbol{\phi}_N. \quad (211)$$

*Für Interessierte:* In der Diplomarbeit von Peter Plessas [Ple09], Svend-Oscar Petersen [Pet04], Munhum Park [PR05] und Adam O'Donovan [ODZ08] sind gute Beispiele dieser Art für Richtungskartierung von Schallfeldern zu finden.

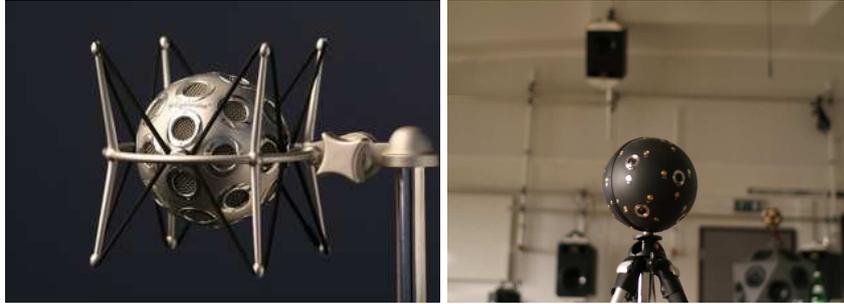


Abbildung 33 – Kugelförmige Mikrofonanordnung von mhacoustics und Bruel und Kjaer.

## 7.8 Radiale Scharfstellfilter / Holografiefilter

Wie oben, tritt bei hohen Frequenzen räumliches Aliasing auf. Aufgrund der Abtastung allerdings, weist dieses in der Regel keine bekannte Regelmäßigkeit auf. Zudem sind, ähnlich wie bei der Nahfeldholografie, die Filterausdrücke, z.B.  $\frac{(kR)^2 h'_n(kR)}{k h_n(kr_p)}$ , bei den tiefen Frequenzen extrem groß und daher Störgeräusch anfällig.

### Sphärische Hankelfilter

Bis auf einen Verzögerungsfaktor  $e^{-ikr}$  lassen sich die sphärischen Hankelfunktionen  $h_n(kr)$  und ihre Ableitung  $h'_n(kr)$  als fraktionale Polynome von  $ikr$  darstellen

$$h_n(kr) = i^{n+1} \frac{e^{-ikr}}{kr} \sum_{l=0}^n \frac{(n+l)!}{l!(n-l)!} \frac{1}{(2ikr)^l}, \quad h'_n(kr) = -\frac{n+1}{kr} h_n(kr) + h_{n-1}(kr).$$

Da  $kr = \omega/cr$  von der Frequenz und dem Radius abhängt, die Laplace-Frequenzdomäne aber unempfindlich gegenüber Frequenzskalierung reagiert<sup>16</sup>, können wir Hankelfunktionen direkt als Hankelfilter normierten Radius  $r = c$  im Laplace-Bereich anschreiben (auf einen Nenner gebracht)

$$h_n(s) = -i^n \frac{\sum_{l=0}^n \alpha_n[l] s^l}{s^{n+1}} e^{-s}, \quad h'_n(s) = i^{n+1} \frac{\sum_{l=0}^n \beta_n[l] s^l}{s^{n+2}} e^{-s},$$

16. Die Impulsantwort wird einfach mit dem reziproken Skalierfaktor in der Zeit gestaucht.

wobei  $\alpha_n[l]$ ,  $\beta_n[l]$  bloß irgendwelche rationalen Koeffizienten sind. Mit der Zergliederung in Filterstufen 2. Ordnung, der entsprechenden Skalierung für die Radien, und der Impulsinvarianztransformation erhalten wir wunderbare digitale IIR-Filter für die Berechnung aller holografischen Filterungen, siehe [Pom08].

## Holografiefilter

Die radialen Filter besitzen einfache asymptotische Darstellungen, aus welchen sie konstruiert werden können.

Der Absolutbetrag aller Hankelfunktionen verläuft oberhalb des Argumentes  $kr \gg 1$  asymptotisch gleich und fällt mit dem Faktor  $\frac{1}{kr}$ . Unterhalb verlaufen Hankelfunktionen höherer Ordnung steiler  $\frac{1}{(kr)^{n+1}}$  und haben höhere Beträge.

Beträge abgeleiteter Hankelfunktionen verhalten sich ähnlich, sind für kleine Argumente  $kr \ll 1$  aber noch steiler  $\frac{1}{(kr)^{n+2}}$  und höher.

Aus diesem Verhalten lassen sich Verläufe in Abb. 34 leichter verstehen. Sie zeigt die radialen Scharfstellfilter für die oben diskutierten kugelförmigen Probleme.

Die enorm hohen (zum Teil bei 0Hz instabilen) Verstärkungen der holografischen Filter bei tiefen Frequenzen führt in der Praxis zu technischen Problemen. Störgeräusche und Fehlpositionierungen aller Art, sowie zu physikalisch nicht schaffbare Lautstärken, wirken sich stark aus, oder der numerisch auflösbare Dynamikbereich wird im interessanten Frequenzband verlassen.

In der Praxis müssen zur Einschränkung der Frequenzgänge Filter eingesetzt werden. Das bedeutet meistens, dass bei tiefen Frequenzen die Richtungsauflösung reduziert wird. Dazu werden von den Ambisonics-Kanälen der höchsten Ordnung beginnend, tieffrequente Signale durch Hochpassfilterung entfernt. Bei Kanälen niedrigerer Ordnung reicht ein Hochpass tieferer Grenzfrequenz aus. Weil durch den Ausfall der hohen Ordnungen Amplitudenverluste entstehen würden, wurden in [Ker10] die übrig gebliebenen Komponenten durch Shelvingfilter angehoben, siehe Abb. 35.

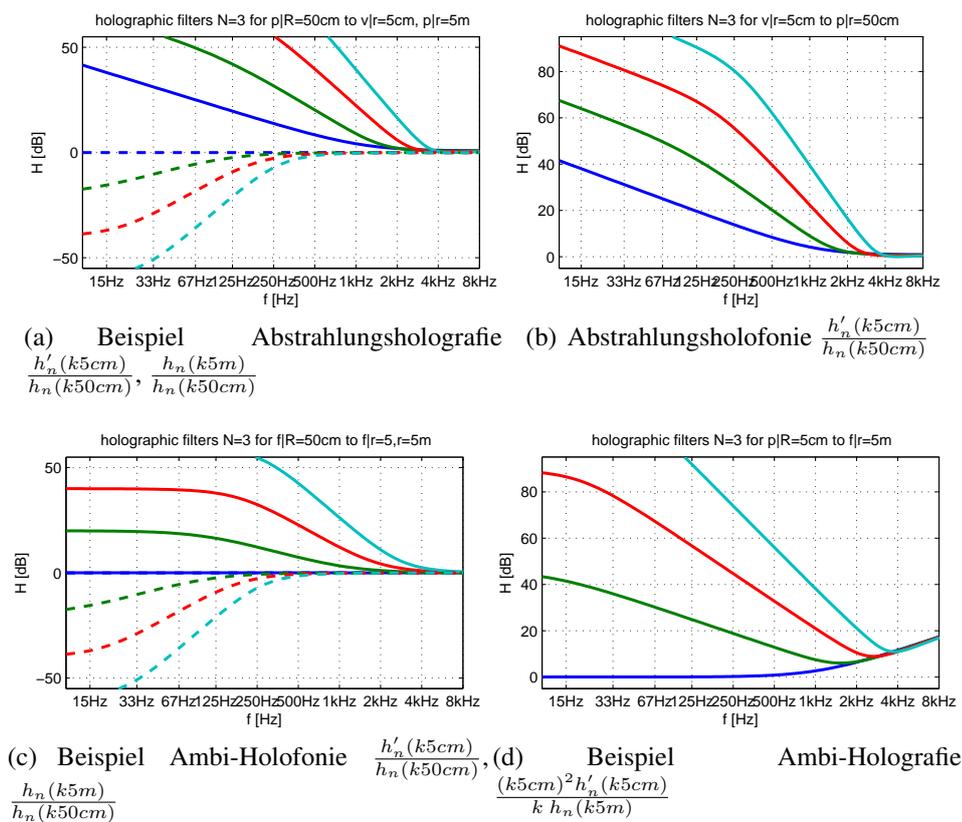


Abbildung 34 – Holografische Filter (zum radial Scharfstellen) für unterschiedliche Anwendungen. Knicke bei niedrigen Frequenzen sind jeweils durch den kleineren der beiden Radien bestimmt, Knicke bei hohen Frequenzen durch den größeren.

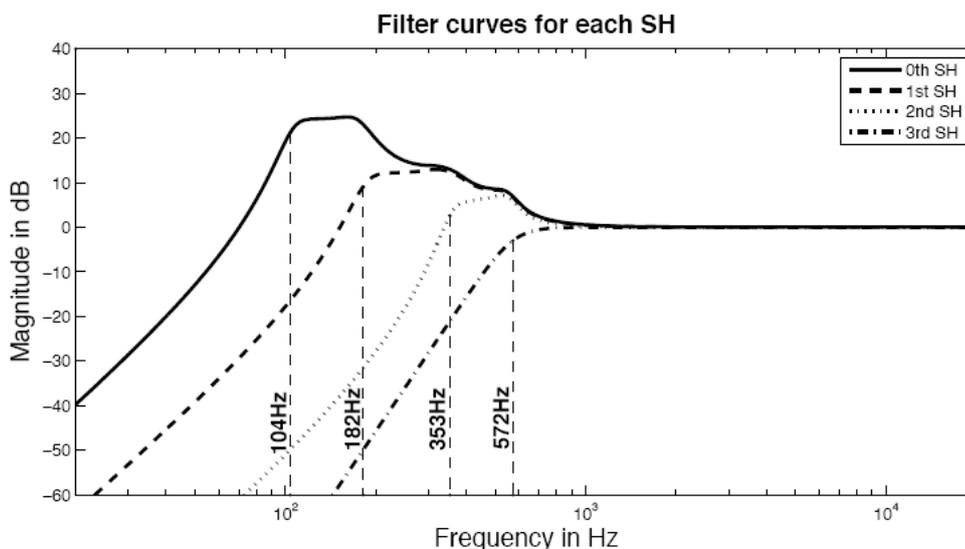
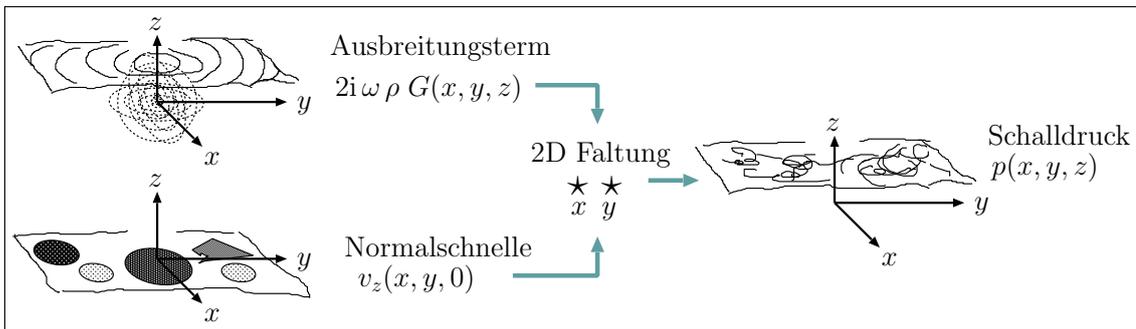


Abbildung 35 – Zur Begrenzung und Entzerrung der Radialscharfstellfilter verwendete Frequenzgänge aus der Diplomarbeit Michael Kerschers [Ker10].

## **Appendix**

Randbedingung Normalschnelle (kontinuierlich)



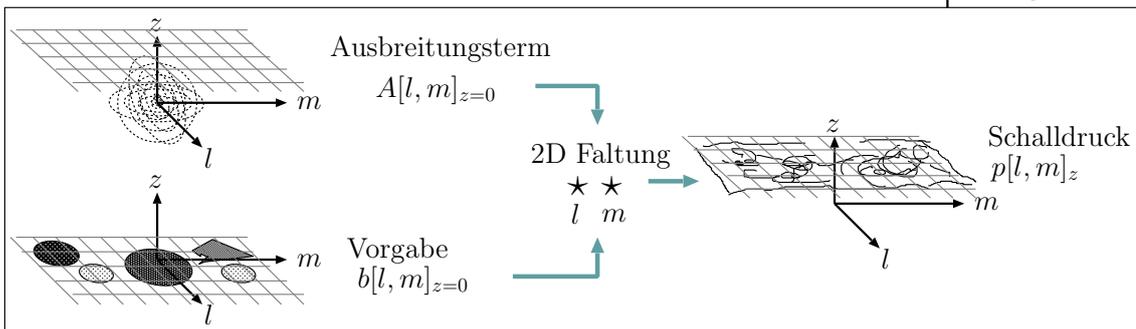
$$p(x, y, z) = 2i\omega\rho \iint G(x - x', y - y', z) v_z(x', y', 0) dx' dy'$$

allgemein (für Normalschnelle, Druck, Quellverteilung)

$$p(x, y, z) = \iint A(x - x', y - y', z) b(x', y', 0) dx' dy'$$

$b$	$A$
$p _{z=0}$	$2\frac{\partial}{\partial z} G$
$v_z _{z=0}$	$2i\omega\rho G$
$f(x, y)$	$G$

Randwerte (diskret)

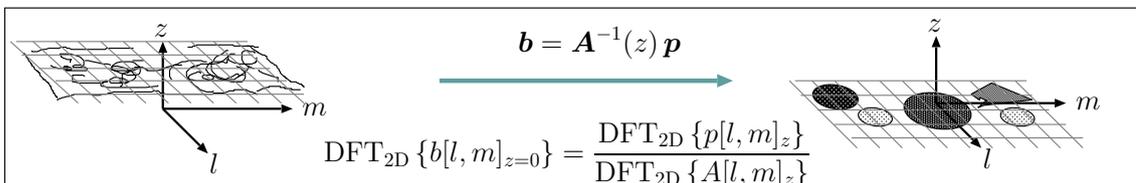


$$p[l, m]_z = \sum_l \sum_m A[l - l', m - m']_z b[l', m']_{z=0} \Delta x \Delta y$$

vektoriell:  $\mathbf{p} = \mathbf{A}(z) \mathbf{b}$

schnelle Faltung (zirkulär):  $\text{DFT}_{2D} \{p[l, m]_z\} = \text{DFT}_{2D} \{A[l, m]_z\} \text{DFT}_{2D} \{b[l, m]_{z=0}\}$

inverses Problem: Holografie (diskret)



Fernfeldrichtwirkung

$$|p_\infty[w_l, w_m]| \propto \text{DFT}_{2D} \{v_z[l, m]_{z=0}\}$$

Abbildung 36 – Planare Holografie und Holografie mit vereinfachten Rayleigh-Integralen im Überblick

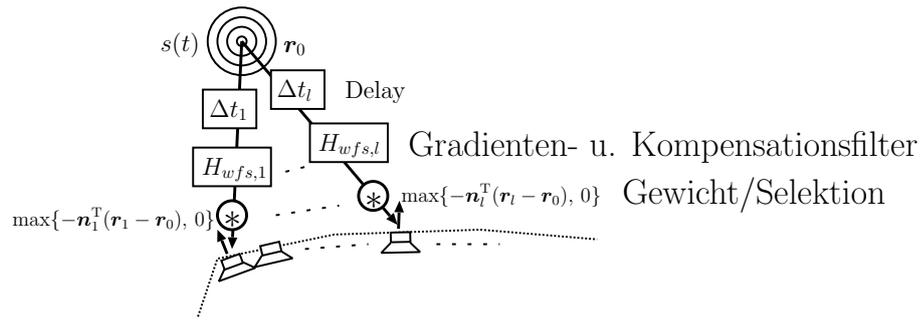
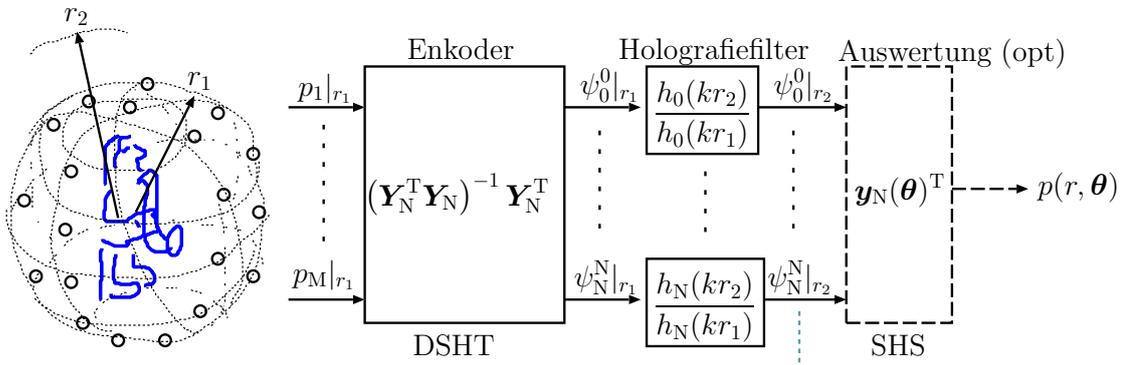
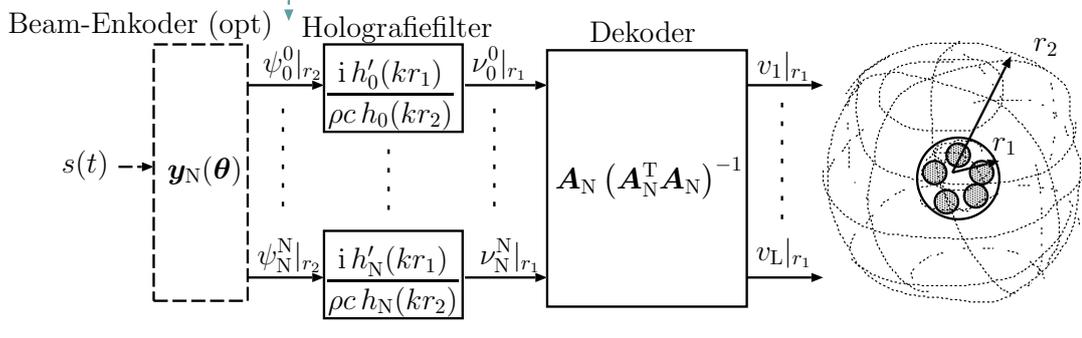


Abbildung 37 – Signalverarbeitung bei der Wellenfeldsynthese (positionsabhängige Verzögerung, Gradienten- und Kompensationsfilter, Richtungsgewichte).

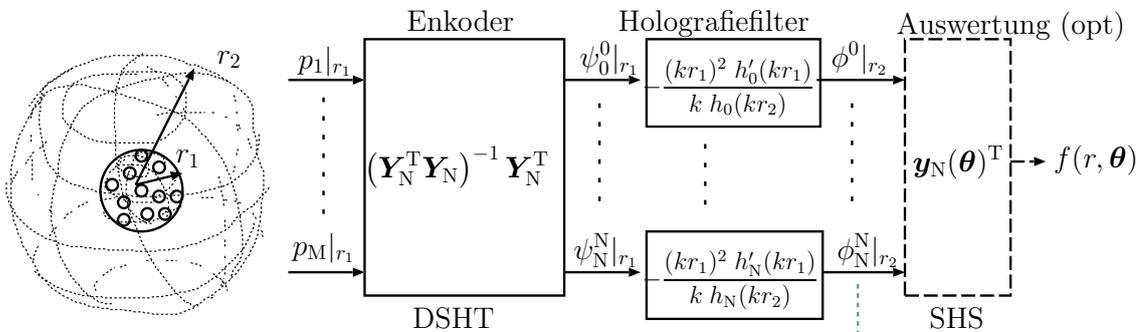
Holografie Schalldruck abstrahlendes Schallfeld (mit offener Mikrofonkugel)



Hologonie Abstrahlung (mit fester Lautsprecherkugel)



Holografie Quellstärkeverteilung Einstrahlung (mit fester Mikrofonkugel)



Hologonie Einstrahlung Quellstärkeverteilung (mit offener Lautsprecherkugel)

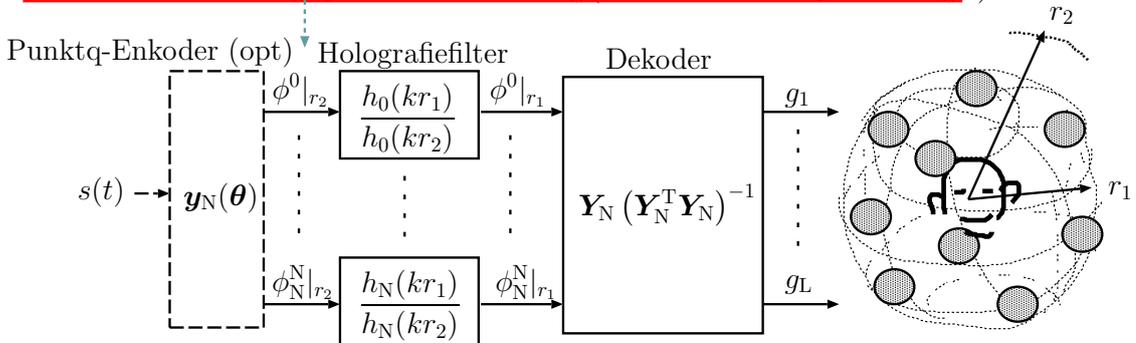


Abbildung 38 – Sphärische Holografie und Hologonie im Überblick

## A Beispiel: Schalleinfallsrichtungsanalyse mit Kreisring-Mikrofonanordnung

Wir können mit ebenen Wellen in 2D eine einfache holografische Aufgabe lösen, welche Amplituden  $g(\varphi)$  aller ebenen Wellen vom Einfallswinkel  $\varphi$  des Horizonts ermittelt. Angenommen wir messen den Schalldruckverlauf an einem Kreisring des Radius  $R$ , so schreibt sich mit Gl. (37) und  $\boldsymbol{\theta}(\varphi')^T R \boldsymbol{\theta}(\varphi) = R \cos(\varphi - \varphi')$  die Messgröße am Mikrofon des Kreiswinkels  $\varphi'$  als

$$p(\varphi') = \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{ikR \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi. \quad (212)$$

Mit einer Fouriertransformation  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi'} (\dots) d\varphi'$  über den Schalldruck an allen Mikrofonwinkeln erhalten wir

$$\psi_m(kR) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi') e^{im\varphi'} d\varphi' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \int_0^{2\pi} e^{ikR \cos(\varphi - \varphi')} e^{-im\varphi'} d\varphi' d\varphi.$$

Nachdem  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikR \cos(\varphi - \varphi')} e^{-im\varphi'} d\varphi' = e^{im(\varphi + \frac{\pi}{2})} J_m(kR)$  erhalten wir:

$$\psi_m(kR) = i^m J_m(kR) \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi = i^m J_m(kR) \gamma_m. \quad (213)$$

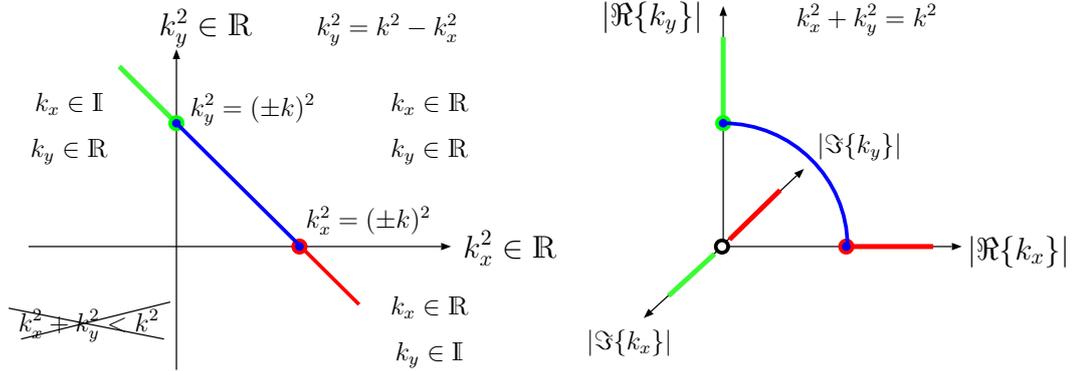
Zur Rückrechnung aus den transformierten Mikrofonsignalen  $\psi_m(kR)$  kann somit die Zerlegung  $\gamma_m$  der Amplituden der ebenen Wellen nach Division durch  $i^m J_m(kR)$  gewonnen werden.

Weil die Besselfunktionen bis hin zu Argumenten  $kR \approx m$  sehr klein sind, ist damit zu rechnen, dass bei kleinen Ringanordnungen keine komplizierten Richtungsmuster ankommen. Damit sind zwar Richtungsauflösungsgrenzen vorgezeichnet, zumindest gelingt es aber, den Schalldruck bei grober Abtastung noch ohne nennenswerte Winkel-Aliasingfehler diskret Fourier zu transformieren.

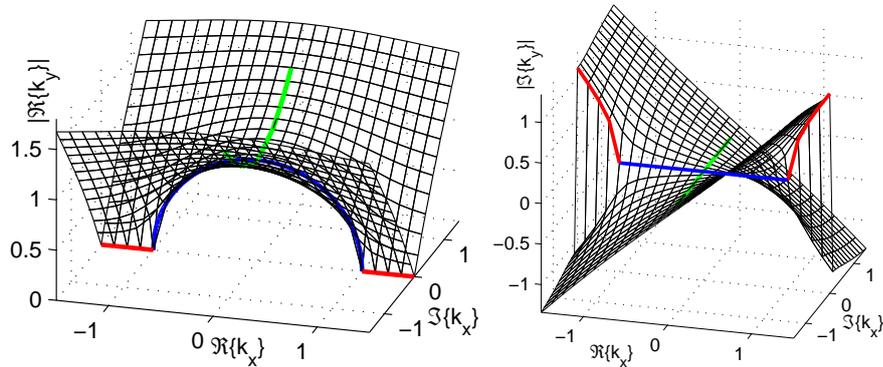
## B Evaneszente Wellen der kartesischen Lösungen

**Evaneszente Wellen.** Mit den quadratischen Größen  $k_x^2, k_y^2, k^2$  versuchen wir Gl. (27) als Geradengleichung in  $\mathbb{R}^2$  aufzufassen, siehe Abb. 39. Bei negativen  $k_x^2, k_y^2 < 0$  zeigt sich, dass der Wellenzahlraum doch der *komplexe* Zahlenraum  $\mathbb{C}^2$  sein muss.

Werden für die Koordinaten des Wellenzahlraumes auch imaginäre Werte zugelassen  $\mathbf{k} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$ , können so genannte *evanescent waves* [Wil99] dargestellt werden. Es ist etwa möglich, dass etwa die eine reelle Wellenzahl bereits größer als  $k_x > k$  sein darf, ohne Gl. (27) zu verletzen, wenn  $k_y \in \mathbb{I}$  und damit  $k_y^2 < 0$ . In Querrichtung bildet sich dann eine exponentiell auslaufende Amplitude  $e^{-\Im\{k_y\}y}$  aus. Das geschieht immer, wenn die Luft durch feingliedrige, gleichanteilsfreie Strukturschwingungen angeregt wird. Solche kurzwellige Strukturschwingungen erzeugen ein *hydrodynamisches Nahfeld* [Mös88], einen akustischen Kurzschluss.



(a) Charakteristische Gleichung reell  $k_x^2, k_y^2 \in \mathbb{R}$ ?



(b) Charakteristische Gleichung ist komplex  $k_x^2, k_y^2 \in \mathbb{C}$ .

Abbildung 39 – Gültige Lösungen der Wellengleichung, der 2D Wellenzahlraum.

Allgemein kann der komplexe Wellenzahlraum unter Einhaltung der Bedingung  $k_x^2 + k_y^2 = k^2 \in \mathbb{R}$  so parametrisiert werden <sup>17</sup>:

$$\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\sigma) \\ -i \sinh(\sigma) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cosh(i\varphi + \sigma) \\ -i \sinh(i\varphi + \sigma) \end{pmatrix}, \quad \sigma, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (214)$$

Ist  $\sigma = 0$ , erhalten wir das Fernfeld mit den Eigenschaften  $\cos(\varphi) = \cosh(i\varphi)$  und  $\sin(\varphi) = -i \sinh(i\varphi)$ . Für andere Werte ergeben sich *evaneszente Wellen*. Diese Wellen sind kurzwelliger als ebene Wellen und *verlaufen quer zur Ausbreitungsrichtung exponentiell*. Für den Fall  $\sigma \neq 0$  erhalten wir *reine Nahfelder*. Die Eigenschaft  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$  sorgt dafür, dass die charakteristische Gleichung eingehalten wird.

Evaneszente Wellen sind stets kurzwelliger als ebene Wellen; Beispiel Abb. 40(b) zeigt die halbe Wellenlänge. Ihre Wellenzahl (im Polarwinkel  $\varphi$ ) berechnet sich aus

$$k_e = k \cosh(\sigma) \geq k. \quad (215)$$

17. Die Hyperbelfunktionen  $\cosh(\zeta) = \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2}$  und  $\sinh(\zeta) = \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2}$  sind mit den Winkelfunktionen  $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$  und  $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$  verwandt; anstatt  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  gilt  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ .

**Konvergenzbereich:** Ebene Wellen verlaufen normal auf die Ausbreitungsrichtung  $\varphi$  konstant, *evaneszente Wellen* hingegen exponentiell. Weil quellenfreie, homogene Schallfelder in keine Raumrichtung unendlich wachsen dürfen, *muss der Konvergenzbereich eingeschränkt*, d.h. vom Quellengebiet abgegrenzt werden.

Immer wenn evaneszente Wellen vorliegen, steht als Konvergenzbereich nur ein Halbraum zur Beschreibung quellenfreier Schallfelder zur Verfügung, vgl. Abb. 40(b)

$$ROC = \begin{cases} \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, & \text{wenn } \sigma = 0, \\ \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \mathbf{r} \right\rangle \geq 0, & \text{sonst, d.h. bei } \sigma \neq 0. \end{cases} \quad (216)$$

**Komplexer Wellenzahlraum, Nah- und Fernfeld.** ... Die Koordinaten des Wellenzahlraumes dürfen auch hier wieder komplex sein  $\mathbf{k} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{C}^3$ , um *evanescent waves* und Abstrahlung darstellen zu können. Auch im dreidimensionalen Raum können kurzwellige, gleichanteilsfreie Strukturschwingungen die Luft zum Schwingen anregen.

Zur Einhaltung der Bedingung  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \in \mathbb{R}$  gilt folgende Parametrisierung:

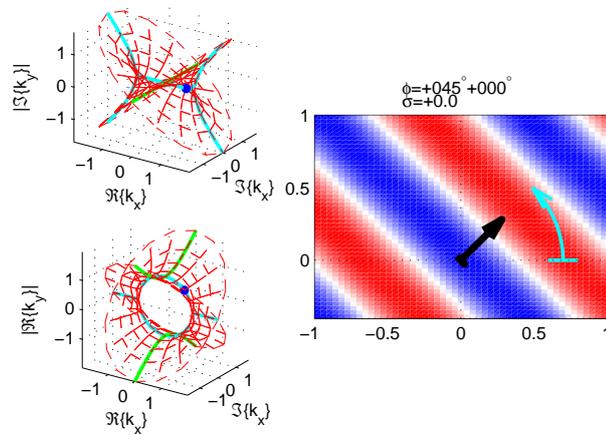
$$\mathbf{k} = k \mathbf{R}_{zyz}(\varphi, \vartheta, \chi) \begin{pmatrix} \cosh(\sigma) \\ 0 \\ -i \sinh(\sigma) \end{pmatrix}, \quad (217)$$

$$\mathbf{R}_{zyz}(\varphi, \vartheta, \chi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\chi) & \sin(\chi) & 0 \\ -\sin(\chi) & \cos(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma, \varphi, \chi \in \mathbb{R}.$$

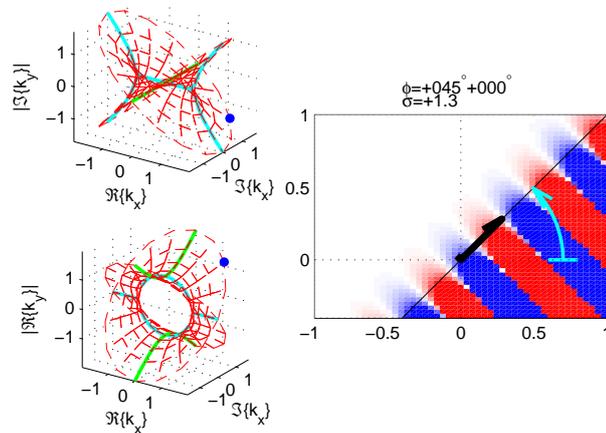
Ist  $\sigma = 0$ , erhalten wir das Fernfeld, in welchem die sphärischen Winkel  $\varphi, \vartheta$  die Richtung angeben, Gl. (38) ( $\chi$  wäre wegen der Rotationssymmetrie ebener Wellen um die Ausbreitungsachse bedeutungslos).

Für  $\sigma \neq 0$  bekommen wir Nahfelder, deren Konvergenzbereich mit dem Rotationswinkel  $\chi$  um die Ausbreitungsrichtung ausgerichtet werden kann. Dies ist eine direkte Erweiterung zum 2D Fall, wenngleich die Formel dazu etwas aufwändiger ist.

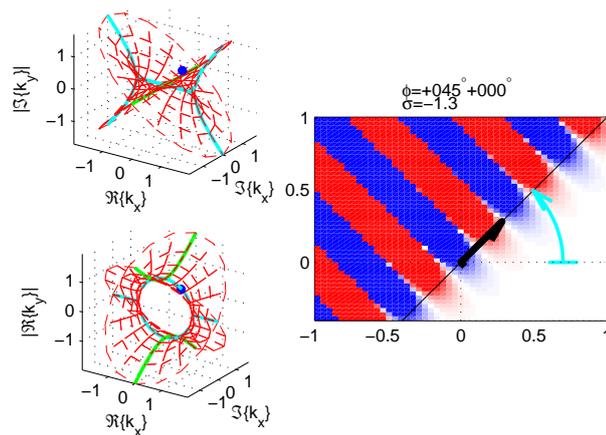
Abb. 42 zeigt denkbare Felder.



(a)  $\sigma = 0, \varphi = 45^\circ$ , überall gültig.



(b)  $\sigma = \text{arcosh}(2), \varphi = 45^\circ$ , gilt links oben.



(c)  $\sigma = -\text{arcosh}(2), \varphi = 45^\circ$ , gilt rechts unten.

Abbildung 40 – Der 2D komplexe Wellenzahlraum und seine Konvergenzbereiche.

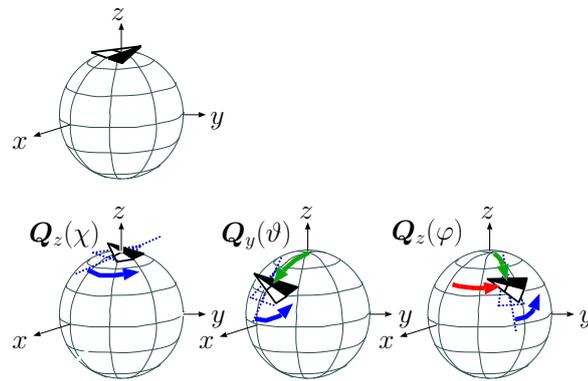


Abbildung 41 – Dieses Bild [Zot09a] zeigt die  $zyz$ -Rotation in 3D, wie in Gl. (217) verwendet.

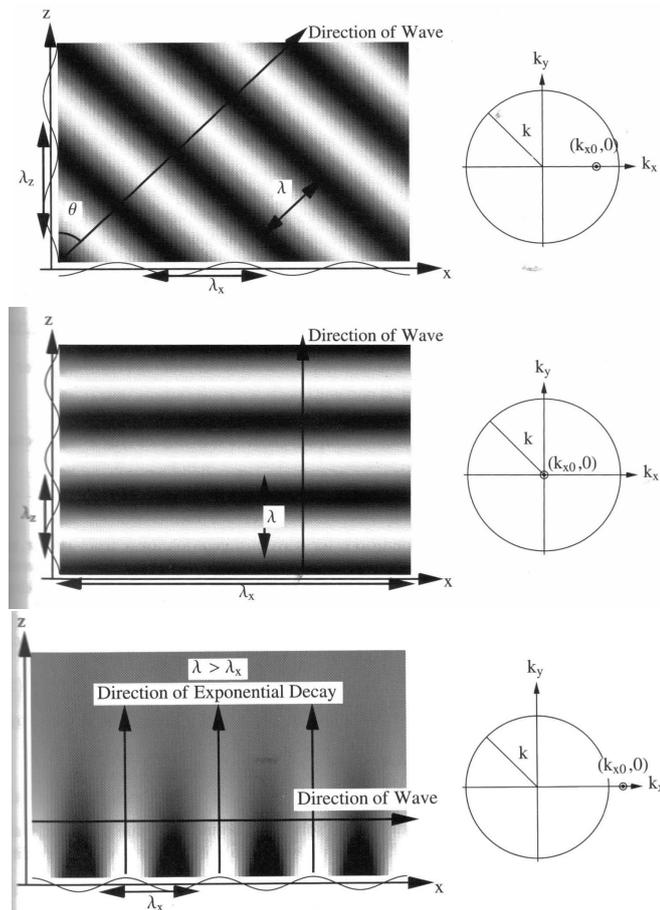


Abbildung 42 – i) Wellenfeld angeregt von einer Transversalwelle auf der  $xy$ -Platte in Richtung  $x$ , ii) konphase Schwingung auf  $xy$ , iii) kleingliedrige Transversalwelle in Richtung  $x$  und zugehörige Wellenzahlen, Bilder [Wil99].

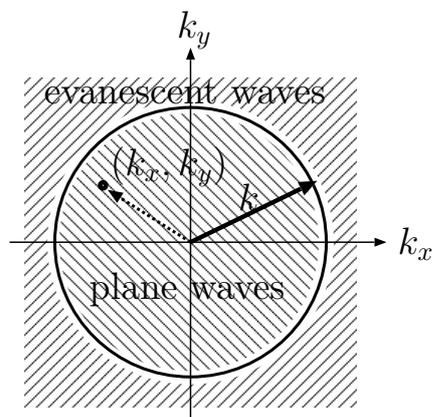


Abbildung 43 – Regionen im Wellenzahlraum der Ebene, vgl. [Wi199]

## C Green'sche Funktion durch richtungsunabhängiges Koordinatensystem

**Die inhomogene Helmholtzgleichung in richtungsunabhängigen Koordinaten.** Wir verwerfen die Richtungsabhängigkeit und setzen die Quelle in den Ursprung. In Kugelkoordinaten verallgemeinerter Dimensionszahl  $D$  bleibt der Radius als einzige räumliche Abhängigkeit  $r = \sqrt{\sum_{i=0}^{D-1} x_i^2}$ . Der Laplaceoperator wird mit der verallgemeinerten Kettenregel in ein richtungsunabhängiges Radiuskoordinatensystem überführt:

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i=0}^{D-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=0}^{D-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=0}^{D-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{D-1} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{D-1} \left[ \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right].\end{aligned}$$

Mit der ersten Ableitung  $\frac{\partial \sqrt{\sum_{i=0}^{D-1} x_i^2}}{\partial x_i} = \frac{1}{2 \sqrt{\sum_{i=0}^{D-1} x_i^2}} 2 x_i = \frac{x_i}{r}$  quadriert und der zweiten Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r^2}$  eingesetzt, erhalten wir

$$\Delta = \left( \frac{D}{r} - \frac{\sum_{i=0}^{D-1} x_i^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{\sum_{i=0}^{D-1} x_i^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (218)$$

Die Definitionsgleichung für die Green'sche Funktion ist damit

$$\left[ \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] G = -\delta(r). \quad (219)$$

**Transformierte Definitionsgleichung der Green'schen Funktion im Freifeld.** Hoffend, damit einen schwierig beschreibbaren Teil der Lösung abspalten zu können, wählen wir den Produktansatz,

$$G = a g(r) r^{-\nu},$$

da wir uns vorstellen, dass das Feld der Green'schen Funktion radial ausklingen müsste.

Durch  $\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r} G = g' r^{-\nu} - \nu g r^{-\nu-1}$  und wiederholte Ableitung  $\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r} [g' r^{-\nu} - \nu g r^{-\nu-1}] = g'' r^{-\nu} - 2\nu g' r^{-\nu-1} - \nu(-\nu-1)g r^{-\nu-2}$  erhalten wir der Idee gemäß eine *transformierte Definitionsgleichung der Green'schen Funktion*

$$a r^{-\nu-2} \left[ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (D-1-2\nu)r \frac{\partial}{\partial r} - (D-1-\nu-1)\nu + k^2 r^2 \right] g = -\delta(r). \quad (220)$$

Aber ist damit die Gleichung nun auch einfacher geworden?

**Fernfeldnäherung der Green'schen Funktion im Freifeld.** Mit  $2\nu = D - 1$  wird die erste Klammer der transformierten Gleichung (220) null  $(D - 1 - 2\nu) = 0$  und die zweite  $-(D - 2 - \nu)\nu = -\frac{D-3}{2}\frac{D-1}{2}$ :

$$a r^{-\nu} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(D-3)(D-1)}{4r} + k^2 \right] g = -\delta(r).$$

Für  $D = 1$  und  $D = 3$  entfällt der Ausdruck  $\frac{(D-3)(D-1)}{4r}$  in der Mitte von selbst, ansonsten wird er für große Radien vernachlässigbar, und die verbleibende Differentialgleichung,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} : \quad a r^{-\nu} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] g = -\delta(r),$$

wird, wie bereits bekannt, durch den Exponentialansatz  $e^{\pm ikr}$  gelöst. *Physikalisch sinnvoll* und *kausal* ist nur die auslaufende Welle  $g = e^{-ikr}$ . Somit ist bis auf den unbestimmten Faktor  $a$  bestimmt, dass die Green'sche Funktion bei großen Radien so aussehen muss:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G = a \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r^{D-1}}}. \quad (\text{bei } D = 1 \text{ und } D = 3 \text{ sogar exakt bei kleinem Radius). \quad (221)$$

**Green'sche Funktion beliebiger Dimension: Bessel'sche Differentialgleichung.** Durch die Wahl des Exponenten  $\nu = \frac{D-2}{2}$ , oder umgekehrt  $D = 2 + 2\nu$ , erhalten wir die Konstanten der transformierten Gl. (220) zu  $(D - 2\nu - 1) = 1$ ,  $(D - \nu - 2) = \nu$  und damit die inhomogene Bessel'sche Differentialgleichung

$$\left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + k^2 r^2 - \nu^2 \right) g = -\frac{\delta(r)}{a r^{-\nu-2}}. \quad (222)$$

Alle Besselfunktionen  $J_\nu(kr)$ ,  $Y_\nu(kr)$ ,  $H_\nu^{(1)}(kr)$ ,  $H_\nu^{(2)}(kr)$  kämen für  $g$  infrage. Aber nur die Hankelfunktion 2. Art  $H_\nu^{(2)}(kr)$  beschreibt einen kausalen Ausbreitungsterm:

$$G = a \sqrt{r^{2-D}} H_{\frac{D-2}{2}}^{(2)}(kr).$$

Die Näherung  $\lim_{kr \rightarrow \infty} H_\nu^{(2)}(kr) = \sqrt{2/(\pi kr)} e^{-ikr - i(2\nu+1)\frac{\pi}{4}}$  aus [OBC00, Eq.10.2.6] verdeutlicht das, denn im Fernfeld ergibt sich die Proportionalität aus Gl. (221)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a \sqrt{r^{2-D}} H_\nu^{(2)}(kr) = a \sqrt{2/(\pi k)} e^{-i(D-1)\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r^{D-1}}}.$$

Nach [Som92, Anhang III, S213, Gl.12] wird die Normierung  $a$  am Grenzwert  $kR \rightarrow 0$  durch den Gauß'schen Integralsatz Gl. (62),  $\int_V \Delta G \, d\mathbf{r} = \int_{\partial V} \nabla^T G \, d\mathbf{S}(\mathbf{r})$ , bestimmt:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{r \leq R} \Delta G \, d\mathbf{r} = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{r^T r = R^2} \frac{\partial G}{\partial r} \, dS(\mathbf{r}).$$

Auf der linken Seite ist das besonders einfach wegen  $\lim_{k \rightarrow 0} \Delta G = -\delta - k^2 G = -\delta$  und der normierten Dirac Deltadistribution  $\int_V \delta \, dV(\mathbf{r}) = 1$ . Der Integrand rechts verwendet

die Nahfeldnäherung [OBC00, Eq.10.7.7]  $\lim_{kr \rightarrow 0} H_\nu^{(2)}(kr) = i\Gamma(\nu)/\pi [(kr)/2]^{-\nu}$ , d.h.  $G = a r^{-\nu} i\Gamma(\nu)/\pi (k/2)^{-\nu} r^{-\nu}$ , ihre Ableitung  $\frac{\partial G}{\partial r} = -ia2\nu\Gamma(\nu)/\pi (k/2)^{-\nu} r^{-2\nu-1}$ , die Eigenschaft  $\nu\Gamma(\nu) = \Gamma(\nu+1)$  und die Hypereinheitskugelfläche  $S_D = 2\sqrt{\pi}^D/\Gamma(\frac{D}{2})$  zur Definition des Flächenelements  $r^{D-1} S_D$  bzw.  $r^{2\nu+1} S_{2\nu+2} = r^{2\nu+1} S_{2\nu+2} = \frac{r^{2\nu+1} 2\pi^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}$ . Eingesetzt kürzen sich Gammafunktionen und Radiusabhängigkeit

$$-1 = -\frac{ia2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}{\pi k^\nu r^{2\nu+1}} \frac{r^{2\nu+1} 2\pi^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} = -4ia \left(\frac{2\pi}{k}\right)^\nu,$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2\pi}{k}}^{D-2}.$$

Wir können die Green'sche Funktion des Freifeldes somit angeben zu

$$G = \frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}^{D-2} H_{\frac{D-2}{2}}^{(2)}(kr). \quad (223)$$

Damit, und mit den einfachen Sonderfällen für  $D = 1, 3$  ergeben sich für Green'sche Funktion des Freifeldes folgende Definitionen:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] G_{1D}(r) = -\delta_{1D}(r), \quad \Rightarrow G_{1D} = \frac{e^{-ikr}}{2ik}, \quad (224)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] G_{2D}(r) = -\delta_{2D}(r), \quad \Rightarrow G_{2D} = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr), \quad (225)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] G_{3D}(r) = -\delta_{3D}(r), \quad \Rightarrow G_{3D} = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \quad (226)$$

## D Green'sche Funktion durch Residuenintegrale und auf komplexen Integrationswegen

Im Wellenzahlraum hängt der Integrand für die Green'sche Funktion

$$G = \frac{1}{(2\pi)^D} \iint \frac{e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^D} \iint \frac{e^{ikr\mu}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\mathbf{k}.$$

offenbar nur mehr von  $k\mu$  ab, was sich als letzte hypersphärische Koordinate eines mit  $\boldsymbol{\theta}_r$  ausgerichteten Wellenzahlraums deuten lässt. Das zugehörige Flächenelement ist nach Hilbert und Courant [HC37, p.387]  $\sqrt{1 - \mu^2}^{D-3} d\mu k^{D-1} dk$ , und die  $D-2$  unabhängigen Integrale ergeben den Faktor  $S_{D-1} = \frac{2\sqrt{\pi}^{D-1}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}$ , die Fläche der Hyper-Einheitskugel im  $\mathbb{R}^{D-1}$ . Damit bleibt dieses Zweifachintegral zu lösen

$$G = \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \iint \frac{e^{ikr\mu}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \sqrt{1 - \mu^2}^{D-3} d\mu k^{D-1} dk.$$

Die typische Annahme der Integrationsgrenzen  $0 \leq k \leq \infty$  und  $-1 \leq \mu \leq 1$  wird für eine gleichmäßige Konvergenz des Integrals verworfen, und wir verwenden stattdessen  $k \in C_+$  wie in Abb. 4, worin der Bruch  $\frac{1}{k^2 - \omega^2 c^2} = \frac{c}{2\omega} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{1}{k - \frac{\omega - i\epsilon}{c}} - \frac{1}{k + \frac{\omega - i\epsilon}{c}} \right]$  partiellbruchzerlegt mit Verschiebung hin zu verschwindenden, kausalen Verlusten verwendet wird, siehe Abb. 4:

$$\begin{aligned} G &= \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \frac{c}{2\omega} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint_{C_+} \left[ \int e^{ikr\mu} \sqrt{1 - \mu^2}^{D-3} d\mu \right] \left[ \frac{1}{k - \frac{\omega - i\epsilon}{c}} - \frac{1}{k + \frac{\omega - i\epsilon}{c}} \right] k^{D-1} dk \\ &= -\frac{S_{D-1}}{2(2\pi)^{D-1}} i(-1)^{D-1} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{D-2} \int e^{-i\frac{\omega}{c}r\mu} \sqrt{1 - \mu^2}^{D-3} d\mu \\ &= -\frac{S_{D-1}}{2(2\pi)^{D-1}} i(-1)^{D-1} k^{D-2} \int e^{-ikr\mu} \sqrt{1 - \mu^2}^{D-3} d\mu. \end{aligned}$$

Da die Wellenzahl nicht notwendigerweise reellwertig ist, darf für ein konvergentes Integral in  $\mu$  der veränderte Integrationspfad in Anlehnung an Weyl [Wey19] das Integral in  $\mu$  verwendet werden, [OBC00, Eq.10.9.21]:

$$\frac{\sqrt{\pi}^3}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu) \left(\frac{kr}{2}\right)^\nu} H_\nu^{(2)}(kr) = \int_{1-i\infty}^1 e^{-ikr\mu} \sqrt{1 - \mu^2}^{2\nu-1} d\mu.$$

Mit  $\nu = \frac{D-2}{2}$  zurückeingesetzt ergibt sich mit  $S_{D-1} = \frac{2\sqrt{\pi}^{D-1}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}$  und die Reflexionseigenschaft [OBC00, Eq.5.5.3]  $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$  der Gammafunktion

$$\begin{aligned} G &= \frac{(-1)^{D-1} \pi}{2i \Gamma(1 - \frac{D-1}{2}) \Gamma(\frac{D-1}{2})} \sqrt{\frac{k}{2\pi r}}^{D-2} H_{\frac{D-2}{2}}^{(2)}(kr) \\ &= \frac{(-1)^{D-1} \sin((D-1)\frac{\pi}{2})}{2i} \sqrt{\frac{k}{2\pi r}}^{D-2} H_{\frac{D-2}{2}}^{(2)}(kr). \end{aligned}$$

Die Abweichung dieses Ergebnisses ist wegen des Faktors  $\frac{\sin((D-1)\frac{\pi}{2})}{2i}$  falsch, der  $\frac{1}{4i}$  lauten muss. Bei ungeraden  $D$  ergibt sich null: das Integral [OBC00, Eq.10.9.21] und die Eigenschaft [OBC00, Eq.5.5.3]  $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$  dürfen nicht verwendet werden. . .

Wird für  $\mu$  der Integrationsweg  $0 \leq \mu \leq 1$  verwendet, also einer über ebene Wellen, würde sich statt  $H_\nu^{(2)}(kr)$  die Besselfunktion  $J_\nu(kr)$  ergeben, und es würden sich statt ausbreitungsfähigen Feldern Stehwellen mit ortsfesten Nullstellen ergeben.

## E Optimierung rotationssymmetrischer Richtmustern

**Maximaler Richtfaktor:** In Legendre-Polynomen angeschrieben, ist das Integral über das zu minimierende quadrierte Richtmuster:

$$\int_{-1}^1 g(\mu)^2 d\mu = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^N \sum_{n'=0}^N \hat{c}_n \hat{c}_{n'} P_n(\mu) P_{n'}(\mu) d\mu = \sum_n \frac{2 \hat{c}_n^2}{2n+1}.$$

Mit dem Wissen, dass die Legendre-Polynome den Wert  $P_n(1) = 1$  liefern, erhalten wir die Kostenfunktion für die Minimierungsaufgabe:

$$J(\hat{c}_n, \lambda) = \sum_n \frac{2\hat{c}_n^2}{2n+1} + \lambda(1 - \sum_n \hat{c}_n),$$

wobei  $\lambda$  als Lagrangemultiplikator die Nebenbedingung ins Spiel bringt. Hinsichtlich  $\hat{c}_n$  und  $\lambda$  abgeleitet und jeweils zu null gesetzt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{4\hat{c}_n}{2n+1} - \lambda &= 0, & \sum_{n=0}^N \hat{c}_n &= 1, \\ \Rightarrow \hat{c}_n &= \frac{\lambda}{4}(2n+1), & \Rightarrow \frac{\lambda}{4} \sum_{n=0}^N (2n+1) &= \frac{\lambda(N+1)^2}{4} = 1 \\ \Rightarrow \hat{c}_n &= \frac{2n+1}{(N+1)^2}. \end{aligned} \quad (227)$$

**Maximaler Schwerpunkt:**

**Energy and energy centroid ( $r_E$ -vector) of a virtual panning function.** Inserting Eq. (??) into the energy integral and using the orthogonality of the Legendre polynomials, cf. [OBC00, Eq. (14.17.6)], we obtain

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbb{S}^2} |g(\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_s \rangle)|^2 d\boldsymbol{\theta} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 |g(\mu)|^2 d\mu = 2\pi \sum_{n=0}^N \sum_{n'=0}^N \frac{a_n a_{n'}^* (2n+1)(2n'+1)}{16\pi^2} \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_{n'}(\mu) d\mu}_{=\frac{2}{2n'+1}} \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{4\pi} |a_n|^2. \end{aligned} \quad (228)$$

After inserting into the centroid integral over the squared weighting function, orthogonality, cf. [OBC00, Eq. (14.17.6)], and the recurrence  $\mu P_n(\mu) = \frac{n P_{n-1}(\mu) + (n+1) P_{n+1}(\mu)}{2n+1}$ , cf. [OBC00, Eq. (14.10.3)], can be applied

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_E &= \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{\theta} |g(\boldsymbol{\theta})|^2 d\boldsymbol{\theta}}{\int_{\mathbb{S}^2} |g(\boldsymbol{\theta})|^2 d\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_s \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \mu |g(\mu)|^2 d\mu}{E} = \boldsymbol{\theta}_s \frac{2\pi \sum_{n,n'} \frac{a_n a_{n'}^* (2n+1)(2n'+1)}{16\pi^2} \int_{-1}^1 \overbrace{\mu P_n(\mu) P_{n'}(\mu)}^{=2(n+1)\delta_{n'n}} d\mu}{E} \\ &= \boldsymbol{\theta}_s \frac{\sum_{n,n'} \frac{a_n a_{n'}^* (2n'+1)}{8\pi} \int_{-1}^1 [n P_{n-1}(\mu) + (n+1) P_{n+1}(\mu)] P_{n'}(\mu) d\mu}{E} \\ &= \boldsymbol{\theta}_s \frac{\sum_{n+1, n'} a_{n+1} a_{n'}^* \int_{-1}^1 (2n'+1)(n+1) P_n(\mu) P_{n'}(\mu) d\mu}{8\pi E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sum_{n,n'+1} \int_{-1}^1 \overbrace{a_n a_{n'+1}^* (2n'+3)(n+1) P_{n+1}(\mu) P_{n'+1}(\mu) d\mu}^{=2(n+1)\delta_{n'n}}}{8\pi E} \\
& = \theta_s \frac{\sum_{n=0}^N (n+1) [a_n a_{n+1}^* + a_n^* a_{n+1}]}{4\pi E} = \theta_s \frac{\sum_{n=0}^N (n+1) \Re\{a_n a_{n+1}^*\}}{2\pi E}. \quad (229)
\end{aligned}$$

Um den Quotienten  $\frac{\int \mu g^2 d\mu}{\int g^2 d\mu}$  zu maximieren, muss ...

**Maximaler Schwerpunkt:**

**Maximization of the  $\mathbf{r}_E$  vector.** In order to maximize the length of the  $\mathbf{r}_E$  vector for real-valued  $a_n$

$$\|\mathbf{r}_E\| = \frac{\tilde{r}_E}{E}, \quad (230)$$

we differentiate it and equate the derivative to zero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \|\mathbf{r}_E\|}{\partial a_n} = 0 &= \frac{\frac{\partial}{\partial a_n} \tilde{r}_E - \|\mathbf{r}_E\| \frac{\partial}{\partial a_n} E}{E} = \frac{[n a_{n-1} + (n+1) a_{n+1}] - \|\mathbf{r}_E\| (2n+1) a_n}{2\pi E} \\
&\Rightarrow n a_{n-1} + (n+1) a_{n+1} - \|\mathbf{r}_E\| (2n+1) a_n = 0. \quad (231)
\end{aligned}$$

The recurrence [OBC00, Eq. (14.10.3)] of the Legendre polynomials  $n P_{n-1}(\mu) + (n+1) P_{n+1}(\mu) - \mu (2n+1) P_n(\mu) = 0$  equals the recurrence of the optimum for the coefficients after setting  $\mu = \|\mathbf{r}_E\|$  and  $a_n = P_n(\|\mathbf{r}_E\|)$ . Therefore the Legendre polynomials are optimal for  $a_n = P_n(\|\mathbf{r}_E\|)$ . As a boundary condition, we desire that the weights should have a zero for the next higher order, i.e.  $a_{N+1} = P_{N+1}(\|\mathbf{r}_E\|) = 0$ . In accordance with Daniel [DRP98, Dan00] this means that the largest root of  $P_{N+1}(\max\|\mathbf{r}_E\|)$  optimizes the length of the  $\mathbf{r}_E$  vector for the given order  $N$ . A simple approximation was found to model the location of this root for  $N \leq 1$ . It was found by substituting  $\vartheta_E(N) = 180^\circ/\pi \arccos \|\max \mathbf{r}_E(N)\|$  and linearly approximating its reciprocal for  $N = 1, \dots, 20$

$$\frac{1}{\vartheta_E(N)} \approx k N + d = \frac{7.2536 N + 10.9654}{1000}. \quad (232)$$

Eq. (128) only re-formulates this.

## F Gauß'scher Integralsatz, rechte Gleichungsseite

Die rechte Gleichungsseite entspricht der Bildung eines Volumsintegrals über differentiell kleine Hüllen. Solche differentielle Hüllen sind infinitesimal kleine Quader der Ausmaße  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

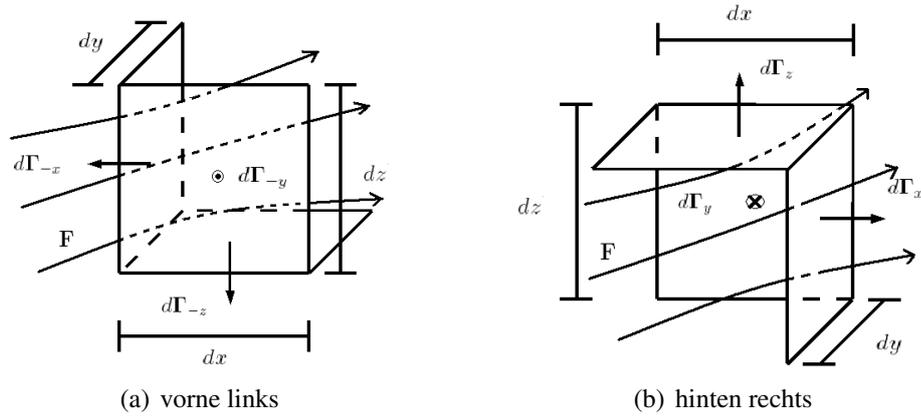


Abbildung 44 – Feldlinien des Vektorfeldes fließen vorne links in die Hülle hinein, hinten rechts heraus.

Das links vorne durch den Quader hindurch tretende Kräftefeld, Abb. 44(a), besteht aus den drei oberflächennormalen Komponenten, deren Vektoren in negative  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Achse weisen. Unter der Annahme, dass  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  entlang der kleinen Oberflächen konstant bleibt, ergeben die drei Flächen und Oberflächennormalkomponenten des Integrals zusammen näherungsweise:

$$-\Delta y \Delta z F_x(\mathbf{r}) - \Delta x \Delta z F_y(\mathbf{r}) - \Delta x \Delta y F_z(\mathbf{r}). \quad (233)$$

Die verbleibenden Flächen des Würfels, Abb. 44(b), gehören zu anderen Raumpunkten. Das Kräftefeld muss für jede Fläche an einer verschobenen Stelle ausgewertet werden, damit die benötigten Oberflächennormalkomponenten  $F_x(\mathbf{r} + \Delta x \mathbf{e}_x)$ ,  $F_y(\mathbf{r} + \Delta y \mathbf{e}_y)$  und  $F_z(\mathbf{r} + \Delta z \mathbf{e}_z)$  erhalten. Weil die Oberflächennormalen dieses Mal in Koordinatenachsenrichtungen zeigen, ergeben sich positive Beiträge zum Integral

$$+\Delta y \Delta z F_x(\mathbf{r} + \Delta x \mathbf{e}_x) + \Delta x \Delta z F_y(\mathbf{r} + \Delta y \mathbf{e}_y) + \Delta x \Delta y F_z(\mathbf{r} + \Delta z \mathbf{e}_z). \quad (234)$$

Der verschobene Auswertungspunkt ist noch unschön, und wir sehen die Möglichkeit, das Vektorfeld durch die Kleinheit der Hülle anhand seiner drei Richtungsableitungen zu linearisieren. Am Beispiel für die Fläche normal auf  $x$  gezeigt:

$$\begin{aligned} \Delta y \Delta z F_x(\mathbf{r} + \Delta x \mathbf{e}_x) &= \Delta y \Delta z F_x(\mathbf{r}) + \Delta y \Delta z \frac{F_x(\mathbf{r} + \Delta x \mathbf{e}_x) - F_x(\mathbf{r})}{\Delta x} \Delta x \\ &\approx F_x(\mathbf{r}) + \frac{\partial F_x(\mathbf{r})}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z, \end{aligned}$$

lassen sich damit alle beteiligten Größen wieder auf den Punkt  $\mathbf{r}$  beziehen. Wir bekommen von allen 6 Flächen (aus Platzgründen ist „ $\mathbf{r}$ “ hier nicht notiert),

$$\begin{aligned} \Delta Q &= -\Delta y \Delta z F_x - \Delta x \Delta z F_y - \Delta x \Delta y F_z + \Delta y \Delta z F_x + \Delta x \Delta z F_y + \Delta x \Delta y F_z + \\ &\quad \frac{\partial F_x(\mathbf{r})}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_y(\mathbf{r})}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_z(\mathbf{r})}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla^T \mathbf{F} \Delta x \Delta y \Delta z, \end{aligned}$$

was nach dem Grenzübergang  $\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0}$  und dem Volumsintegral die rechte Gleichungsseite im Gauß'schen Integralsatz ergibt:

$$Q = \int_{\Omega} dQ(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{F}(\mathbf{r}) dx dy dz.$$

## G Laplace-Operator in Polarkoordinaten

In Polarkoordinaten ist der Laplace-Operator folglich

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_r + \Delta_{\varphi}, & (235) \\ \Delta_r &= \left[ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial r} + \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \Delta_{\varphi} &= \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $r$  sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} (2x) = \frac{x}{r}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Damit ist  $\Delta_r$

$$\Delta_r = \left( \frac{2}{r} - \frac{x^2 + y^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (236)$$

Die Ableitungen von  $\varphi$  verwenden  $\arctan'(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{r^2} = \frac{y}{r^2} \frac{x}{r^2} = \frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^2} = -\frac{x}{r^2} \frac{y}{r^2} = -\frac{xy}{r^3}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich  $\Delta_{\varphi}$  zu

$$\Delta_{\varphi} = \frac{xy - xy}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{x^2 + y^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (237)$$

und so der gesamte Laplace-Operator im Polarkoordinatensystem

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} & (238) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

## H Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten ist der Laplace-Operator

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_r + \Delta_\varphi + \Delta_\vartheta, \\ \Delta_r &= \left[ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right] \frac{\partial}{\partial r} + \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \Delta_\varphi &= \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \Delta_\vartheta &= \left[ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left[ \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.\end{aligned}\quad (239)$$

Die Ableitungen von  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  sind (vgl. Polarkoordinatensystem in  $\mathbb{R}^2$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, & \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} &= \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}.\end{aligned}$$

Damit ist  $\Delta_r$

$$\Delta_r = \left( \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}.\quad (240)$$

Die Ableitungen von  $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$  sind gleich wie im Polarkoordinatensystem des  $\mathbb{R}^2$  mit  $r_{xy} := \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{r_{xy}^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{r_{xy}^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{xy}{r_{xy}^3}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -\frac{xy}{r_{xy}^3}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich  $\Delta_\varphi$  zu

$$\Delta_\varphi = \frac{xy - xy}{r_{xy}^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{r_{xy}^2}{r_{xy}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r_{xy}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.\quad (241)$$

Die Ableitungen von  $\vartheta = \arccos \frac{z}{r}$  sind mit  $\arccos' \zeta = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \left( -\frac{z}{r^2} \right) \frac{x}{r} = -\frac{zx}{r_{xy} r^2}, & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= -\frac{zy}{r_{xy} r^2}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \frac{r}{r_{xy} r} - \frac{r}{r_{xy} r^2} \frac{z}{r} = \frac{r^2 - z^2}{r_{xy} r^2} = \frac{r_{xy}}{r^2}.\end{aligned}$$

Die Summe der quadrierten ersten Ableitungen ist also

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)^2 = \frac{z^2(x^2+y^2)}{r_{xy}^2 r^4} + \frac{r_{xy}^2}{r^4} = \frac{z^2 + r_{xy}^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}.$$

Die zweiten Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{zx}{r_{xy} r^2} \right) &= -\frac{z}{r_{xy} r^2} + \frac{zx}{r_{xy}^2 r^2} \frac{x}{r_{xy}} + \frac{2zx}{r_{xy} r^3} \frac{x}{r} \\ &= z \frac{-r^2 r_{xy}^2 + r^2 x^2 + 2x^2 r_{xy}^2}{r_{xy}^3 r^4}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{zy}{r_{xy} r^2} \right) &= z \frac{-r^2 r_{xy}^2 + r^2 y^2 + 2y^2 r_{xy}^2}{r_{xy}^3 r^4}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{r_{xy}}{r^2} \right) &= -\frac{2 r_{xy} z}{r^3 r} = -z \frac{2 r_{xy}^4}{r_{xy}^3 r^4}.\end{aligned}$$

In Summe werden sie zu

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = z \frac{-2r^2 r_{xy}^2 + r^2 r_{xy}^2 + 2r_{xy}^4 - 2r_{xy}^4}{r_{xy}^3 r^4} = -\frac{z}{r_{xy} r^2} = -\frac{\cos\vartheta}{r^2 \sin\vartheta}.$$

Der Bestandteil  $\Delta_\vartheta$  des Laplace-Operators ist also

$$\Delta_\vartheta = -\frac{\cos\vartheta}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}. \quad (242)$$

Das negative Vorzeichen wird vereinfacht, weil die entsprechende Negation von  $\vartheta$  unbedeutend ist. Schließlich ist der Laplace-Operator aus Gln. (240), (241) und (242),

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_r + \Delta_\varphi + \Delta_\vartheta = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos\vartheta}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right).\end{aligned} \quad (243)$$

## I Helmholtzgleichung des $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin(\varphi) & \varphi &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \\ x, y &\in [-\infty, \infty] & r &\in [0, \infty], \varphi \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

Die Helmholtzgleichung in Polarkoordinaten verwendet den von Radius und Polarwinkel abhängigen Schalldruck

$$\Delta p(r, \varphi) + k^2 p(r, \varphi) = 0 . \quad (244)$$

Der Laplace-Operator bleibt noch auf Polarkoordinaten umzuschreiben, was im Anhang G vollständig ausgeführt wird und schließlich ergibt:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} . \quad (245)$$

### 1.0.1 Separation der Helmholtzgleichung in Polarkoordinaten

Mit dem Laplace-Operator ist nun die Helmholtzgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial^2 p(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 p(r, \varphi) = 0 .$$

**Produktansatz.** Zur *Separation der Variablen* wird folgender Ansatz verwendet

$$p(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) .$$

Nach dem Einsetzen und Division durch den Ansatz zerfällt die Gleichung in nach  $r$  und  $\varphi$  differenzierte Anteile

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k^2 R \Phi &= 0 \quad \left| \cdot \frac{r^2}{R \Phi} \right. \\ \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k^2 r^2 &= 0 \\ \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + k^2 r^2 &= - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Die zwei Seiten der Gleichung hängen von verschiedenen Variablen ab. Die linke Seite hängt nicht von der Variablen der rechten Seite ab, und umgekehrt. Daher ist die Gleichung nur erfüllt, wenn beide Seiten konstant sind. Als sog. *Separationskonstante* wird  $\mu^2$  angenommen. Aus der rechten Seite wird die Differentialgleichung des „harmonischen Oszillators“

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \mu^2 \Phi = 0 , \quad (246)$$

und aus der linken die Bessel'sche Differentialgleichung

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \mu^2) R = 0 . \quad (247)$$

### I.0.2 Lösung der Differentialgl. (246) im Winkel $\varphi$

Lösungen, die Glg.(246) erfüllen, sind leicht zu finden, z.B.  $\Phi(\varphi) = \sin(\mu\varphi)$ ,  $\Phi(\varphi) = \cos(\mu\varphi)$  oder  $\Phi(\varphi) = e^{i\mu\varphi}$ . Da es sich um eine gewöhnliche DGL 2.Ordnung handelt, kann man die allgemeine Lösung als Summe zweier linear unabhängiger Lösungen anschreiben

$$\Phi(\varphi) = A \sin(\mu\varphi) + B \cos(\mu\varphi) .$$

Der Schalldruck ist eine stetige Funktion und daher muss auch  $\Phi(\varphi)$  stetig sein

$$\Phi(0) \stackrel{!}{=} \Phi(2\pi) .$$

Das erfüllen  $2\pi$ -periodische Funktionen, weshalb  $\mu \in \mathbb{Z}$ , und somit ergibt sich

$$\Phi(\varphi) = A \sin(m\varphi) + B \cos(m\varphi) , m \in \mathbb{Z} . \quad (248)$$

Alternativ könnte die Lösung auch gleichwertig durch Exponentialfunktionen angeschrieben werden, was aber zu keiner besonders sinnvollen Interpretation führt<sup>18</sup>.

### I.0.3 Lösung der Differentialgl. (247) im Radius $r$

Glg.(247) ergibt mit der Substitution  $\xi = kr$ ,  $\Rightarrow \frac{dR(r)}{dr} = \frac{dR(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = k \frac{dR(\xi)}{d\xi}$  ;  $\frac{d^2R(r)}{dr^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dR(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} \right) \frac{d\xi}{dr} = k^2 \frac{d^2R(\xi)}{d\xi^2}$ , die Bessel'sche Differentialgleichung

$$\xi^2 \frac{d^2R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - \mu^2)R = 0 .$$

Diese kann mit der Frobenius-Methode gelöst werden, vgl. [Kre99a], und es ergeben sich folgende Lösungen

$$J_\mu(\xi) = \xi^\mu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \xi^{2l}}{2^{2l+\lambda} l! \Gamma(\mu + l + 1)} ,$$

$$Y_\mu(\xi) := \lim_{p \rightarrow \mu} \frac{J_p(\xi) \cos p\pi - J_{-p}(\xi)}{\sin p\pi} .$$

$J_\mu(\xi)$  wird als Bessel-Funktion 1. Art und  $Y_\mu(\xi)$  als Bessel-Funktion 2. Art (bzw. Neumann-Funktion) bezeichnet. Da wegen der Lösung im Winkel  $\mu$  nur ganzzahlige Werte annehmen kann, ergibt sich für die radiale Lösung

$$R(r) = E J_m(kr) + F Y_m(kr) . \quad (249)$$

Die radiale Lösung kann alternativ auch mit komplexwertigen Funktionen angeschrieben

18. Die Funktion  $\Re\{e^{i\omega t + i m \varphi}\}$  würde sich mit einer Rotationsfrequenz  $\omega/m$  drehen. Eine von physikalischem Sinn befreite Definition, die erst wieder bei Kombination zweier Moden  $e^{im\varphi}$  und  $e^{-im\varphi}$  ein statisches Richtungsmuster ergibt, unabhängig von  $m$  und  $\omega$ .

werden

$$R(r) = \tilde{E} H_m^{(1)}(kr) + \tilde{F} H_m^{(2)}(kr) ,$$

wobei  $H_m^{(1,2)}(kr)$  als Hankel-Funktionen der 1. bzw. 2. Art bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(kr) &= J_m(kr) + iY_m(kr) \\ H_m^{(2)}(kr) &= J_m(kr) - iY_m(kr) \end{aligned}$$

## 1.1 Lösungen für inneres und äußeres Problem im $\mathbb{R}^2$

Für die radiale Lösung wird zwischen innerem und äußerem Problem unterschieden, da nur dieser Term die Schallausbreitung ausdrückt.

**Inneres Problem** Bei einem inneren Problem liegen alle Quellen außerhalb eines Kreises um den Ursprung mit Radius  $r_q$ , vgl. Abb. 23 a) und wir suchen eine Lösung für den inneren Bereich  $0 \leq r \leq r_q$ . Für die Neumann-Funktionen gilt  $\lim_{r \rightarrow 0} Y_m(kr) = -\infty$ , siehe Abb. 46. Physikalisch sinnvoll sind nur Lösungen bei denen der Schalldruck endliche Werte annimmt,  $|p(r, \varphi)| < \infty$  und für die radiale Lösung bleibt somit nur:

$$R(r) = E J_m(kr) . \quad (250)$$

Durch Einsetzen in den Produktansatz erhält man

$$p_m(r, \varphi) = E J_m(kr) (A \sin(m\varphi) + B \cos(m\varphi))$$

Mit der Summe über alle Moden ergibt sich, unten mit normierten Winkelharmonischen ( $\delta_m = 1$  für  $m = 0$  und 0 sonst; *Kronecker-Delta*),

$$\begin{aligned} p(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} J_m(kr) \left( \hat{A} \sin(m\varphi) + \hat{B} \cos(m\varphi) \right) , \\ p(r, \varphi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m J_{|m|}(kr) \sqrt{\frac{2 - \delta_m}{2\pi}} \begin{cases} \cos(m\varphi) & , m \geq 0 \\ \sin(m\varphi) & , m < 0 \end{cases} , \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $b_m$  die Koeffizienten der angulären und radialen Lösung zusammenfassen.

**Äußeres Problem** Für äußere Problem liegen alle Quellen innerhalb eines Kreises um den Ursprung mit Radius  $r_q$ , vgl. Abb. 23 b) und wir suchen eine Lösung für den äußeren Bereich  $r_q \leq r \leq \infty$ . Hierbei muss für eine eindeutige und physikalisch sinnvolle Lösung auch eine Bedingung gestellt werden, die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung<sup>19</sup> für den zweidimensionalen Raum:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + ik \right) R(r) = 0 .$$

19. Das Vorzeichen ist von der Konvention für die Fourier-Transformation abhängig,  $e^{+i\omega t}$ .

Es zeigt sich, dass nur  $H_m^{(2)}(kr)$  diese Bedingung erfüllt (für  $kr \gg 1$ :  $H_m^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$ )  
 $\Rightarrow \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} (-ik) e^{-i(kr - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$ . Die Lösung für den Schalldruck des ausstrahlenden Feldes ist folglich

$$p(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m H_{|m|}^{(2)}(kr) \sqrt{\frac{2 - \delta_m}{2\pi}} \begin{cases} \cos(m\varphi) & , m \geq 0 \\ \sin(m\varphi) & , m < 0 \end{cases}.$$

Zur Unterscheidung der Koeffizienten verwenden wir für jene des ausstrahlenden Feldes  $c_m$ .

### 1.1.1 Polare Basislösungen

Beide anwendungsfertige Lösungen zusammen nehmen folgende Gestalt an:

$$p(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( b_m J_{|m|}(kr) + c_m H_{|m|}^{(2)}(kr) \right) \Phi_m(\varphi).$$

Darin bezeichnen  $b_m$  die Koeffizienten des *inneren Problems* und  $c_m$  die Koeffizienten des ausstrahlenden, äußeren Problems. Sind beide Koeffizienten (*Wellenspektren*) bekannt, können alle Arten von homogenen Schallfeldern in 2D dargestellt werden. Die normierten winkelabhängigen Ausdrücke sind darin zusammengefasst als:

$$\Phi_m(\varphi) = \sqrt{\frac{2 - \delta_m}{2\pi}} \begin{cases} \cos(m\varphi) & , m \geq 0 \\ \sin(m\varphi) & , m < 0 \end{cases}. \quad (251)$$

In dieser Form sind sie orthogonal (nachdem sie normiert sind sogar orthonormal):

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m(\varphi) \Phi_{m'}(\varphi) d\varphi = \delta_{mm'}. \quad (252)$$

Weiters erlaubt die Orthogonalitätsbeziehung die Definition des Transformationsintegrals (Fouriertransformation) in die Harmonischen des Kreises

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \Phi_m(\varphi) & \left| \int \Phi_{m'}, \int \Phi_m \Phi_{m'} = \delta_{m'm} \right. \\ \Rightarrow \phi_m &= \int f(\varphi) \Phi_m(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (253)$$

Green'sche Funktionen im freien Feld besitzen die Definition

$$(\Delta + k^2) G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (254)$$

Dabei ist die Deltadistribution auf der rechten Seite der Gleichung die sog. *Inhomogenität*, an deren Position  $\mathbf{r}_0$  die Helmholtzgleichung angeregt wird. Sie besteht eigentlich aus

einem Produkt aus Dirac-Deltadistributionen, in 2D:  $\delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ , bzw. in 3D:  $\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$ .

Am einfachsten lässt sich diese Gleichung in Polar- oder Kugelkoordinaten lösen, weil darin die Ausstrahlungsbedingung leicht zu prüfen ist, und sich Vereinfachungen ergeben.

Typischerweise wird nur die Lösung für  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  gesucht, also eine einfache inhomogene Helmholtzgleichung im Radius gelöst. Der gezeigte Lösungsweg ist eine Spur aufwändiger, weil die allgemeinere Lösung für Ambisonics gebraucht wird.

In der Richtung  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$  ergibt sich eine Lösung  $g_{q,\boldsymbol{\theta}}$ , die sich laut Gerlach [Ger07] und Schnizer [Sch12b] schrittweise auf ein eindimensionales inhomogenes Problem im Radius  $g_{q,kr}$  reduzieren lässt.

Damit bei der Umrechnung in Richtungs- und Radiuskomponenten keine Abhängigkeit vom Radius entstehen, gilt für  $D$  Dimensionen:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\delta(r - r_0)}{r^{D-1}} \delta(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_0 - 1), \quad (255)$$

damit

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \, d\mathbf{r} = \int_{\Omega} \frac{\delta(r - r_0) \delta(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_0 - 1)}{r^{D-1}} r^{D-1} \, dr \, d\boldsymbol{\theta}.$$

### 1.1.2 Quellverteilungen im Winkel

Dabei werden die Dimensionen des inhomogenen Problems auf eine (Radius) reduziert. Der Lösungsansatz kann vorerst auch als Punktquellenverteilungen mit gegebener Amplitudenverteilung angesetzt werden, die später für einen einzelnen Quellpunkt im Winkel ausgewertet wird

$$(\Delta + k^2) G = -f(\boldsymbol{\theta}) \frac{\delta(r - r_0)}{r^{D-1}}. \quad (256)$$

### 1.1.3 Lösung der kreisförmigen Quellverteilung in Polarkoordinaten 2D

Für  $D = 2$  wird zuerst die richtungsabhängige Funktion  $f(\boldsymbol{\theta}) = f(\varphi)$  in Form ihrer Zerlegung in normierte Kreisharmonische angeschrieben:

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \Phi_m(\varphi). \quad (257)$$

Als Lösungsansatz wird diese Zerlegung mit einer unbekanntem Funktion  $g_m(kr)$  im Radius zusammengebaut

$$G = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{|m|}(kr) \phi_m \Phi_m(\varphi). \quad (258)$$

Der winkelabhängige Lösungsanteil beinhaltet Eigenfunktionen des Laplace-Operators  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ , weshalb seine Anwendung eine Skalierung mit dem Eigenwert (vgl. Separationskonstante) ergibt  $\Delta \Phi_m = -m^2/r^2 \Phi_m$ . Eingesetzt ergibt das mit

$$\Delta \Phi_m g_m = g_m \Delta \Phi_m + \Phi_m \Delta g_m$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{m^2}{r^2} + \Delta + k^2 \right) g_{|m|}(kr) \phi_m \Phi_m(\varphi) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \Phi_m(\varphi) \frac{\delta(r - r_0)}{r}.$$

Multiplikation mit  $\Phi_{m'}$  und Integration über  $\varphi$  macht die Orthogonalitätsbeziehung Gl. (252) geltend ( $\int \Phi_m(\varphi) \Phi_{m'}(\varphi) d\varphi = \delta_{mm'}$ ) und lässt die Summe zerfallen. Die inhomogene Bessel-Differentialgleichung bleibt übrig

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) g_m(kr) = -\frac{\delta(r - r_0)}{r} \quad (259)$$

**Lösung der inhomogenen Bessel-Differentialgleichung.** Wie in Kreyszig [Kre99b] beschrieben, kann diese inhomogene Gleichung mit der *Variation der Konstanten* gelöst werden, bzw. wie in [Ger07], unter der Verwendung der beiden unabhängigen Funktionen  $H_m^{(2)}(kr)$  und  $J_m(kr)$  zu (mit  $dkr/dr = k$ ):

$$g_m(kr) = H_m^{(2)}(kr) \int_0^r \frac{J_m(kr)}{W} \frac{\delta(r - r_0)}{r} \frac{dkr}{k} + J_m(kr) \int_r^\infty \frac{H_m^{(2)}(kr)}{W} \frac{\delta(r - r_0)}{r} \frac{dkr}{k}.$$

Darin wird die Wronski-Determinante  $W$  verwendet, die ungleich 0 ist und Unabhängigkeit beider Lösungen ausdrückt, siehe [AS64]

$$W = \begin{vmatrix} J_m(kr) & J'_m(kr) \\ H_m^{(2)}(kr) & H_m^{(2)'}(kr) \end{vmatrix} = J_m(kr) H_m^{(2)'}(kr) - J'_m(kr) H_m^{(2)}(kr) = -\frac{2i}{\pi kr}. \quad (260)$$

In beide Integrale eingesetzt, ergibt sich die Lösung:

$$g_m(kr) = -\frac{i\pi}{2} \begin{cases} J_m(kr_0) H_m^{(2)}(kr), & \text{für } r \geq r_0, \\ H_m^{(2)}(kr_0) J_m(kr) & \text{für } r \leq r_0. \end{cases} \quad (261)$$

**Die Quellenverteilung auf dem Kreis in 2D** ergibt daher das Feld

$$G = -\frac{i\pi}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \Phi_m(\varphi) \begin{cases} J_{|m|}(kr_0) H_{|m|}^{(2)}(kr), & \text{für } r \geq r_0, \\ H_{|m|}^{(2)}(kr_0) J_{|m|}(kr) & \text{für } r \leq r_0. \end{cases} \quad (262)$$

mit den normierten Kreisharmonischen aus Gl. (251).

#### 1.1.4 Punktquelle in 2D

Für eine Punktquelle wird mit Gl. (251) der winkelabhängige Teil  $\phi_m$  eingesetzt

$$\phi_m = \int \delta(\varphi - \varphi_0) \Phi_m(\varphi) d\varphi = \Phi_m(\varphi_0), \quad (263)$$

also gilt für die Deltadistribution im Winkel  $\delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m(\varphi) \Phi_m(\varphi_0)$  und somit

$$G = -\frac{i\pi}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m(\varphi_0) \Phi_m(\varphi) \begin{cases} J_{|m|}(kr_0) H_{|m|}^{(2)}(kr), & \text{für } r \geq r_0, \\ H_{|m|}^{(2)}(kr_0) J_{|m|}(kr) & \text{für } r \leq r_0. \end{cases} \quad (264)$$

**Punktquelle 2D im Ursprung.** Für den Radius  $r_0 = 0$  und mit  $J_{|m|}(0) = \delta_m$  erhalten wir mit  $\phi_0 \Phi_0 = \frac{1}{2\pi}$  die 2D Punktquelle

$$G = -\frac{i}{4} H_0(kr). \quad (265)$$

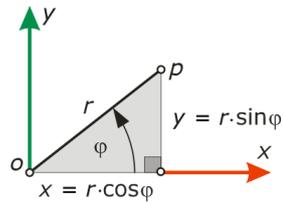
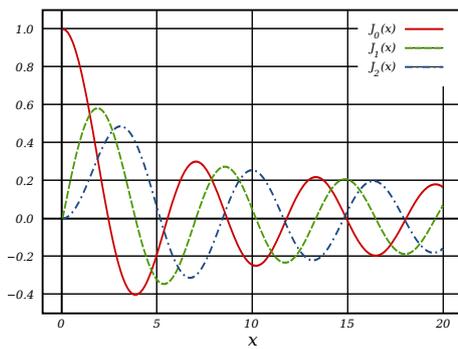
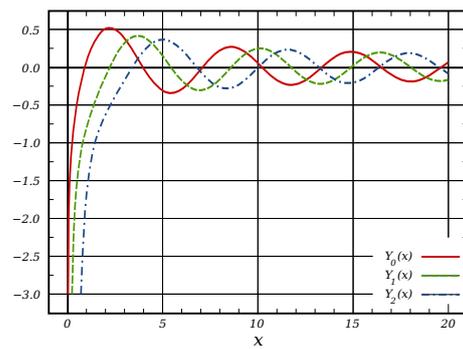


Abbildung 45 – Polarkoordinaten



(a) 1.Art



(b) 2.Art

Abbildung 46 – Bessel-Funktionen

## J Separation der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten

Mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, vgl. Glg. (145), ergibt die Helmholtz-Differentialgleichung, vgl. Glg. (244),

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{r})}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r})}{\partial \varphi^2} + k^2 p(\mathbf{r}) = 0 .$$

**Produktansatz** Durch Einsetzen des Ansatzes, vgl. Glg. (146), erhält man

$$\Phi \Theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \Phi \Theta \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R \Phi \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} R \Phi \frac{d\Theta}{d\vartheta} + \frac{R \Theta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 + R \Phi \Theta = 0 \quad \left| \cdot \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{R \Phi \Theta} \right.$$

$$\frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r \sin^2 \vartheta}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \vartheta = 0 .$$

**Separation von  $\varphi$**  Bringt man die von  $\vartheta$  und  $r$  abhängigen Terme der Gleichung auf die rechte Seite, so ergibt sich

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = - \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{2r \sin^2 \vartheta}{R} \frac{dR}{dr} - \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} - \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} - k^2 r^2 \sin^2 \vartheta \stackrel{!}{=} \text{const.} \quad (266)$$

Die linke Seite von Glg. (266) ergibt mit  $-\mu^2$  als Separationskonstante gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, vgl. Glg. (147),

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\mu^2 .$$

**Separation von  $\vartheta$  und  $r$**  Die rechte Seite von Glg. (266) ergibt mit  $-\mu^2$  als Separationskonstante

$$\frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r \sin^2 \vartheta}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} + k^2 r^2 \sin^2 \vartheta - \mu^2 = 0 \quad \left| : \sin^2 \vartheta \right.$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} + k^2 r^2 - \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} = 0 .$$

Bringt man die von  $\vartheta$  abhängigen Terme der Gleichung auf die rechte Seite, so ergibt sich

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = - \frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} - \frac{\cos \vartheta}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} + \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} \stackrel{!}{=} \text{const.} \quad (267)$$

Die rechte Seite von Glg. (267) ergibt mit  $\nu(\nu + 1)$  als Separationskonstante und nach Multiplikation mit  $\Theta$  die zugeordnete Legendre'sche Differentialgleichung, vgl. Glg. (148),

$$\nu(\nu + 1)\Theta = - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} + \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} \Theta .$$

Die linke Seite von Glg. (267) ergibt mit  $\nu(\nu + 1)$  als Separationskonstante und nach Multiplikation mit  $\frac{R}{r^2}$  die sphärische Bessel'sche Differentialgleichung, vgl. Glg. (149),

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = \frac{\nu(\nu + 1)}{r^2} R.$$

## K Lösung der sphärischen Bessel'schen DGL

Equivalent kann Glg.(149) wie folgt angeschrieben werden,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] R = 0.$$

Mit der Substitution  $z = kr$  und damit  $r \frac{dR}{dr} = kr \frac{dR}{d(kr)} = z \frac{dR}{dz}$  sowie  $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = z^2 \frac{d^2 R}{dz^2}$  ergibt sich

$$z^2 \frac{d^2 R}{dz^2} + 2z \frac{dR}{dz} + [z^2 - \nu(\nu + 1)] R = 0.$$

Mit der Substitution für die Lösung  $R(z) = z^{-\frac{1}{2}} S(z)$  wird die Glg. in die Bessel'sche DGL überführt,

$$z^2 \frac{d^2 S}{dz^2} + z \frac{dS}{dz} + [z^2 - (\nu + \frac{1}{2})^2] S = 0.$$

Diese kann mit der Frobenius-Methode gelöst werden, vgl. [Kre99a] und mit  $\lambda = \nu + \frac{1}{2}$  lassen sich die Lösungen anschreiben als

$$J_\lambda(z) = z^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m+\lambda} m! \Gamma(\lambda + m + 1)},$$

$$Y_\lambda(z) = \frac{J_\lambda(z) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}.$$

$J_\lambda(z)$  wird als Bessel-Funktion 1. Art und  $Y_\lambda(z)$  als Bessel-Funktion 2. Art bezeichnet, wobei dies für  $\lambda = l \in \mathbb{N}$  als Grenzwert definiert wird,

$$Y_l(z) = \lim_{\lambda \rightarrow l} Y_\lambda(z).$$

Die Lösungen für die sphärische Bessel'sche DGL, Glg.(149), ergeben sich durch Rücksubstitution,

$$j_\nu(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr),$$

$$y_\nu(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Y_{\nu+\frac{1}{2}}(kr).$$

Diese werden als sphärische Bessel-Funktionen der 1. und 2. Art bezeichnet, der Faktor  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  ist Konvention (Normierung?).

## Literatur

- [AB79] J. B. Allen and D. A. Berkley, "Image method for efficiently simulating small-room acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 64, no. 4, 1979.
- [AFKW06] R. Avizienis, A. Freed, P. Kassakian, and D. Wessel, "A compact 120 independent element spherical loudspeaker array with programmable radiation patterns," in *120th AES Convention*, Paris, France, 2006.
- [AS64] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 1964. [Online]. Available: <http://www.math.hkbu.edu.hk/support/aands/toc.htm>
- [BC39] B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, 3rd ed. Chelsea Publishing, American Mathematical Society 2001, 1987 (1st edition 1939).
- [Beh06] G. Behler, "Sound source with adjustable directivity," in *4th joint ASA ASJ meeting*, Honolulu, Hawaii, 2006.
- [Ber88] A. J. Berkhout, "A holographic approach to acoustic control," *AES Journal*, 1988.
- [BF11] S. Braun and M. Frank, "Localization of 3d ambisonic recordings and ambisonic virtual sources," in *Proceedings of the 1st ICASA, Detmold*, 2011.
- [BM71] A. J. Burton and G. F. Miller, "The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems," *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 323, no. 1553, pp. 201–210, 1971. [Online]. Available: <http://rspa.royalsocietypublishing.org>
- [Boy00] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications, 2000.
- [Cap69] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," in *Proceedings of the IEEE*, 1969.
- [CR12] I. CVX Research, "CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0," <http://cvxr.com/cvx>, Aug. 2012.
- [Dan00] J. Daniel, *Représentation des champs acoustiques, application à la transmission et à la reproduction de scènes sonores complexes dans un contexte multimédia*. Thèse de doctorat, 2000.
- [Deb10] D. Deboy, "Acoustic centering and rotational tracking in surrounding spherical microphone arrays," Master's thesis, Kunstuni/TU Graz, 2010.
- [DH94] J. R. Driscoll and D. M. J. Healy, "Computing fourier transforms and convolutions on the 2-sphere," *Advances in Applied Mathematics*, vol. 15, 1994.
- [DRP98] J. Daniel, J.-B. Rault, and J.-D. Polack, "Ambisonics Encoding of Other Audio Formats for Multiple Listening Conditions," in *prepr. 4795, 105th AES Conv.*, San Francisco, Sept. 1998.
- [Duf01] D. G. Duffy, *Green's Functions with Applications*. CRC Press, 2001.
- [Elk00] G. W. Elko, "Superdirectional microphone arrays," 2000.

- [Elk04] —, “Differential microphone arrays,” 2004.
- [Faz10] F. Fazi, “Sound field reproduction,” Ph.D. dissertation, ISVR, University of Southampton, 2010.
- [Fle88] H. Fleischer, *Fourier-Akustik: Beschreibung der Schallstrahlung von ebenen Schwingern mit Hilfe der räumlichen Fourier-Methode*, ser. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Schwingungstechnik, Nr. 101. VDI-Verlag, 1988.
- [FN12] F. M. Fazi and P. A. Nelson, “Nonuniqueness of the solution of the sound field reproduction problem with boundary pressure control,” *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 98, no. 1, pp. 1–14, 2012. [Online]. Available: <http://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaau>
- [Fra08] M. Frank, “Localization experiments using different 2d ambisonic decoders,” in *25th Tonmeistertagung*, 2008.
- [Fra13] —, “Phantom sources using multiple loudspeakers in the horizontal plane,” PhD Thesis, Kunstuni Graz, 2013.
- [GB08] M. Grant and S. Boyd, “Graph implementations for nonsmooth convex programs,” in *Recent Advances in Learning and Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, Eds. Springer-Verlag Limited, 2008, pp. 95–110, [http://stanford.edu/~boyd/graph\\_dcp.html](http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html).
- [Ger92] M. Gerzon, “General metatheory of auditory localisation,” in *92nd Convention of the Audio Engineering Society*, Vienna, Austria, March 1992.
- [Ger07] U. H. Gerlach, *Linear Mathematics in Infinite Dimensions: Signals, Boundary Value Problems, and Special Functions*. Beta Edition online, 2007. [Online]. Available: <http://www.math.ohio-state.edu/~gerlach/math/BVtypset/>
- [GHB<sup>+</sup>05] K. M. Górski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelmann, “Healpix: A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere,” *The Astrophysical Journal*, vol. 622, pp. 759–771, 2005. [Online]. Available: <http://healpix.jpl.nasa.gov>
- [GK65] G. Golub and W. Kahan, “Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix,” *SIAM Numer. Anal.*, vol. 2, no. 2, pp. 205–224, 1965.
- [Gre28] G. Green, *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*, Facsimile-Druck in 100 Exemplaren, Berlin, 1889 ed. Nottingham, 1828. [Online]. Available: <http://books.google.at/books>
- [HC37] D. Hilbert and R. Courant, *Methoden der mathematischen Physik II*. Springer Berlin, 1937.
- [HG06] A. Hjørungnes and D. Gesbert, “Complex-valued matrix differentiation: Techniques and key results,” *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2006.
- [Hof08] D. Hofer, *Implementierung eines 64 Kanal Mikrofonarrays*. Diplomarbeit, 2008.

- [Hoh09] F. Hohl, “Kugelmikrofonarray zur abstrahlungsvermessung von musikinstrumenten,” Master’s thesis, Kunstuni/TU Graz, 2009.
- [Huy90] C. Huygens, *Traité de la Lumière*. Gauthier-Villars Et C-ie Editeurs, Paris, 1920 (reprint of original 1690), gallica, Bibliothèque Numérique. [Online]. Available: <http://gallica.bnf.fr>
- [Ill77] A. Illényi, “Über die holophonische shallempfindung,” in *Proc. 9th Int. Congress on Acoustics, Madrid, 1977*.
- [Jes73] M. Jessel, *acoustique théorique: propagation et holophonie*. Paris: Masson, 1973.
- [Juh93] P.-M. Juhl, “The boundary element method for sound field calculations,” PhD Thesis, University of Denmark, 1993.
- [Ker10] M. Kerscher, “Compact spherical loudspeaker array for variable sound-radiation,” Master’s thesis, Kunstuni/TU Graz, 2010.
- [Kir83] G. R. Kirchhoff, “Zur Theorie der Lichtstrahlen,” *Annalen der Physik*, vol. 254, no. 4, 1883, Universal Multimedia Electronic Library (UrMEL), Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek Jena (ThULB). [Online]. Available: <http://zs.thulb.uni-jena.de/>
- [Kre99a] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 8th, Ed. John Wiley & Sons, 1999.
- [Kre99b] ———, *Advanced Engineering Mathematics*, 8th ed. Wiley, 1999.
- [KT14] A. Komnik and E. G. Tsitsishvili, Eds., *Komplexe Integration*. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [KW04] P. Kassakian and D. Wessel, “Characterization of spherical loudspeaker arrays,” San Francisco, CA, 2004, p. Convention paper #1430.
- [Li05] Z. Li, “The capture and recreation of 3d auditory scenes,” PhD Thesis, University of Maryland, College Park, 2005.
- [ME02] J. Meyer and G. Elko, “A highly scalable spherical microphone array based on an orthonormal decomposition of the soundfield,” in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2002. Proceedings.(ICASSP’02). IEEE International Conference on*, vol. 2, Orlando, FL, USA, 2002.
- [MN02] P. Majdak and M. Noisternig, *Implementation Kopfpositionsbezogener Binauraltechnik*. Diplomarbeit, 2002.
- [Mor06] S. Moreau, “Étude et réalisation d’outils avancés d’encodage spatial pour la technique de spatialisation sonore Higher Order Ambisonics: microphone 3d et contrôle de distance,” PhD Thesis, Université du Maine, 2006.
- [Mös88] M. Möser, *Analyse und Synthese akustischer Spektren*. Springer-Verlag, 1988.
- [Mös09] M. Möser, *Technische Akustik*. Springer, 2009.
- [MWL85] J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee, “Nearfield acoustic holography: I. theory of generalized holography and the development of nah,” *Journal of the Acoustical Society of America (JASA)*, 1985.

- [OBC00] F. W. J. Olver, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, Eds., *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000, <http://dlmf.nist.gov>, accessed June 2012.
- [ODZ08] A. O'Donovan, R. Duraiswami, and D. Zotkin, "Imaging concert hall acoustics using visual and audio cameras," in *Proceedings of the ICASSP*, 2008.
- [OSB99] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 1999.
- [Pas10] A. M. Pasqual, "Sound directivity control in a 3-d space by a compact spherical loudspeaker array," Ph.D. dissertation, Unicamp, Campinas, Brazil, 2010.
- [PDV13] M. Pollow, P. Dietrich, and M. Vorländer, "Room impulse responses of rectangular rooms for sources and receivers of arbitrary directivity," in *Fortschritte der Akustik, AIA-DAGA*, Meran, 2013.
- [Pet04] S.-O. Petersen, "Localization of sound sources using 3d microphone array," Master's Thesis, University of South Denmark, Odense, Sept 2004. [Online]. Available: [oscarpetersen.dk](http://oscarpetersen.dk)
- [Ple09] P. Plessas, "Rigid sphere microphone arrays for spatial recording and holography," Master's thesis, Kunstuni/TU Graz, 2009.
- [Pol05] M. A. Poletti, "Three-dimensional surround sound systems based on spherical harmonics," *Journal of the Audio Engineering Society*, 2005.
- [Pol07] M. Pollow, "Variable directivity of dodecahedron loudspeakers," M. Thesis, Institut für Technische Akustik, RWTH-Aachen, Aachen, D, 2007.
- [Pom08] H. Pomberger, "Angular and radial directivity control for spherical loudspeaker arrays," Thesis, Institut für Elektronische Musik und Akustik, Kunstuni Graz, Technical University Graz, Graz, A, 2008.
- [PR05] M. Park and B. Rafaely, "Sound-field analysis by plane-wave decomposition using spherical microphone array," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, pp. 3094–3103, Aug 2005.
- [Pul97] V. Pulkki, "Virtual sound source positioning using vector base amplitude panning," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 45, no. 6, pp. 456–466, 1997.
- [Raf05] B. Rafaely, "Analysis and design of spherical microphone arrays," *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 2005.
- [RSZ95] E. A. Rakhmanov, E. B. Saff, and Y. M. Zhou, "Electrons on the sphere," *Computational Methods and Function Theory*, 1995.
- [Sch68] H. A. Schenck, "Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 44, no. 1, pp. 41–58, 1968. [Online]. Available: <http://asadl.org/jasa>
- [Sch12a] P. Schmidt, "Improvements in localisation of planar acoustic holography," Master's thesis, University of Music and Performing Arts, Graz, 2012.
- [Sch12b] B. Schnizer, *Analytische Methoden in der Physik*. Vorlesung an der TU Graz, Institut für Technische Physik, 2012. [Online]. Available: <http://itp.tugraz.at/~schnizer/AnalyticalMethods/>

- [SK97] E. Saff and A. B. J. Kuijlaars, “Distributing many points on a sphere,” *The Mathematical Intelligencer*, vol. 19, pp. 523–538, 1997.
- [Sne94] N. Sneeuw, “Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective,” *Geophysical Journal International*, vol. 118, pp. 707–716, 1994.
- [Som92] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik (Band 6) Partielle Differentialgleichungen in der Physik*, 6th ed. Harri-Deutsch, 1978 (reprint 1992).
- [Son00] A. Sontacchi, *Neue Ansätze der Schallfeldreproduktion*. Dissertation, 2000.
- [SRA08] S. Spors, R. Rabenstein, and J. Ahrens, “The theory of wave field synthesis revisited,” in *124th AES Convention, Amsterdam*, 2008.
- [Sta14] J. A. U. Staackmann, “Moden-basierte simulation von raumübertragungsfunktionen mit richtwirkung,” Master’s Thesis, TU Graz / Kunstuniversität Graz, Graz, 2014.
- [SW04] I. H. Sloan and R. S. Womersley, “Extremal systems of points and numerical integration on the sphere,” *Advances in Computational Mathematics*, vol. 21, pp. 107–125, 2004.
- [vH60] H. von Helmholtz, “Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, no. 57, pp. 1–72, 1860, niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Digitalisierungszentrum, 37070 Göttingen. [Online]. Available: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de>
- [WA80] G. Weinreich and E. B. Arnold, “Method for measuring acoustic radiation fields,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 68, 08/1980 1980.
- [WDC97] O. Warusfel, P. Derogis, and R. Causse, “Radiation synthesis with digitally controlled loudspeakers,” in *103rd AES Convention, Paris*, 1997.
- [Wen13] F. Wendt, “Untersuchung von phantomschallquellen vertikaler lautsprecheranordnungen,” 2013.
- [Wey19] H. Weyl, “Ausbreitung elektromagnetischer wellen über einem ebenen leiter,” *Annalen der Physik*, 1919.
- [Wik10] “Bessel function,” 2010. [Online]. Available: [http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function)
- [Wi199] E. G. Williams, *Fourier Acoustics*. Academic Press, 1999.
- [WMS80] E. G. Williams, J. D. Maynard, and E. Skudrzyk, “Sound source reconstructions using a microphone array,” *Journal of the Acoustical Society of America (JASA)*, 1980.
- [ZF12] F. Zotter and M. Frank, “All-round ambisonic panning and decoding,” *Journal of the Audio Eng. Soc.*, 2012.
- [ZH07] F. Zotter and R. Höldrich, “Modeling radiation synthesis with spherical loudspeaker arrays,” in *Proceedings of the ICA, Madrid, 02/09/2007* 2007.

- [ZN07] F. Zotter and M. Noisternig, “Near- and far-field beamforming using spherical loudspeaker arrays,” in *Proc. of the 3rd Alps Adria Acoustics Congress*, Graz, 27/09/2007 2007.
- [Zot09a] F. Zotter, *Analysis and Synthesis of Sound-Radiation with Spherical Arrays*. Doktorarbeit, 2009.
- [Zot09b] —, “Sampling strategies for acoustic holography/holography on the sphere,” in *NAG-DAGA, Rotterdam*, 2009.
- [ZPF09] F. Zotter, H. Pomberger, and M. Frank, “An alternative ambisonics formulation: Modal source-strength matching and the effect of spatial aliasing,” in *126th AES Convention, Munich*, 2009.
- [ZPN12] F. Zotter, H. Pomberger, and M. Noisternig, “Energy preserving ambisonic decoding,” *Acta Acustica United with Acustica*, 2012.
- [ZPS08] F. Zotter, H. Pomberger, and A. Schmeder, “Efficient directivity pattern control for spherical loudspeaker arrays,” in *ACOUSTICS08*, 2008.
- [ZS13] F. Zotter and S. Spors, “Is sound field control determined at all frequencies? how is it related to numerical acoustics?” in *52nd AES Conf., Sound Field Control*, Guildford, 2013.